21 Virial-Satz

Wir fragen nach dem zeitlichen Mittelwert $\bar{\mathcal{T}}$ für die kinetische Energie

$$\bar{\mathcal{T}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{T}(t)\mathrm{d}t. \tag{21.1}$$

Es gilt

$$\int \mathcal{T}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i \mathrm{d}t. \tag{21.2}$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int \mathcal{T}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \int \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \mathrm{d}t. \tag{21.3}$$

Damit folgt

$$\bar{\mathcal{T}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i \Big|_0^\tau - \frac{1}{2} \sum_i \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i}. \tag{21.4}$$

Der Virialsatz sagt aus: Falls $\mathbf{p}$ und $\mathbf{x}$ endlich bleiben, folgt

$$\bar{\mathcal{T}} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i}. \tag{21.5}$$

Anwendungen

(i) $\mathcal{V}(r) = cr^n$ Wir betrachten ein Potential, das proportional r^n ist. Für dieses gilt

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,\mathcal{V}(r) = -cn\mathbf{x}r^{n-2}, \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{x} = -cnr^n = -n\mathcal{V}(r). \tag{21.6}$$

Daher gilt für Bahnen im Endlichen

$$\bar{\mathcal{T}} + \bar{\mathcal{V}} = E, \quad \to \quad \bar{\mathcal{T}} = \frac{n}{n+2}E, \quad \bar{\mathcal{V}} = \frac{2}{n+2}E. \tag{21.7}$$

Das bedeutet für den harmonischen Oszillator $n = 2$, $\bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{V}} = E/2$ mit $E > 0$. Für das Kepler-Problem erhält man $n = -1$, $\bar{\mathcal{T}} = -E$, $\bar{\mathcal{V}} = 2E$ $(E < 0)$. Dies bedeutet, dass ein Satellit, der in der Erdatmosphäre gebremst wird, zwar an potentieller Energie verliert, aber an kinetischer Energie gewinnt, jedenfalls so lange er noch annähernd eine Kreis- oder Spiralbahn beschreibt.

Eine interessante Konsequenz ist die folgende: Der Saturn hat zwei Monde, Janus (Durchmesser 180 km) und Epimetheus (Durchmesser 120 km), die sich auf fast der gleichen Bahn bewegen. Die Bahnen liegen so nahe beieinander, dass sie zusammenstoßen würden, falls zwischen ihnen keine Gravitationskräfte wirken würden. Wenn der eine den anderen fast eingeholt hat, würde man annehmen, dass die beiden durch die Gravitation aufeinander stürzen. Tatsächlich gewinnt der innere etwas schnellere an Energie, aber das Doppelte davon wird in potentielle Energie umgesetzt, so dass er sich in eine etwas weiter außen liegende Bahn bewegt und dabei kinetische Energie verliert, also langsamer wird, während der andere voraus fliegende potentielle Energie verliert und kinetische gewinnt und damit seinem Verfolger davon saust. Nach etwa 4 Jahren treffen sie sich wieder und tauschen Energie aus, während sie in 0.69 Tagen den Saturn umkreisen.

Etwas ähnliches gilt für einen Begleiter der Erde, Cruithne (Durchmesser 5 km), der vor einigen Jahren gefunden wurde. Er umkreist die Sonne in einem Jahr. Wenn er auf seiner Bahn die Erde einholt, gewinnt auch er an Energie, verliert kinetische Energie und bleibt dann zurück. Nach etwa 395 Jahren hat ihn die Erde ziemlich eingeholt (sie kommen sich auf 15 Millionen km nahe). Er verliert Energie und gewinnt kinetische Energie und entfernt sich dadurch wieder von der Erde. Inzwischen wurde noch ein zweiter Himmelskörper (2002AA$_{29}$, knapp 100 m Durchmesser) mit ähnlichen dynamischen Eigenschaften gefunden.

Druck eines idealen Gases Wir betrachten ein Gas in einem Quader der Seitenlängen a, b und c gefüllt mit einem idealen Gas,

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c. \tag{21.8}$$

Auf die Atome wirken Kräfte an den Oberflächen des Quaders. Die mittlere Kraft auf die Atome ist ausgedrückt durch den Druck P

$$\begin{array}{cc} \text{bei} & \sum_i \mathbf{F}_i \\ x = 0 & Pbc\mathbf{e}_x \\ x = a & -Pbc\mathbf{e}_x \\ y = 0 & Pac\mathbf{e}_y \\ y = b & -Pac\mathbf{e}_y \\ z = 0 & Pab\mathbf{e}_z \\ z = c & -Pab\mathbf{e}_z \end{array} \tag{21.9}$$

Damit folgt dann mit dem Volumen V der Zusammenhang zwischen Energie und Druck eines idealen Gases

$$E = \bar{\mathcal{T}} = \frac{3}{2}Pabc = \frac{3}{2}PV. \tag{21.10}$$

D Mechanik des starren Körpers

22 Starrer Körper

22.a Beschreibung

Ein starrer Körper ist eine Ansammlung von Massenpunkten mit festen Abständen. Als Lagekoordinaten führen wir ein
α) den Ort des Schwerpunkts (drei Koordinaten) und β) die Orientierung des Körpers (drei Winkel), z.B. die Richtung Schwerpunkt zu einem körperfesten Punkt P; dies sind zwei Koordinaten; es bleibt noch ein Freiheitsgrad (Rotation um Achse Schwerpunkt P). Später geben wir eine explizite Beschreibung durch Euler-Winkel.

Zur Beschreibung führen wir ein

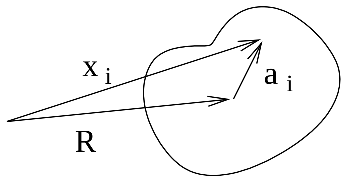
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &:= \text{Vektor vom Schwerpunkt zur Masse } m_i, \\ \mathbf{x}_i &:= \text{Vektor vom Ursprung zur Masse } m_i. \end{aligned} \tag{22.1}$$

Damit folgt dann mit dem Schwerpunkt $\mathbf{R}$ und der Gesamtmasse M

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{a}_i, \quad \sum_i m_i \mathbf{x}_i = M\mathbf{R}, \quad M = \sum_i m_i. \tag{22.2}$$

Hieraus folgt auch

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \tag{22.3}$$



Führen wir weiter ein

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \text{Geschwindigkeit des Schwerpunkts}, \\ \mathbf{v}_i &:= \text{Geschwindigkeit der Masse } m_i. \end{aligned} \tag{22.4}$$

so folgt

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{a}}_i. \tag{22.5}$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus
α) der Translationsbewegung des Schwerpunkts mit der Geschwindigkeit $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ und
β) der Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Zur Berechnung der Rotationsgeschwindigkeit verwenden wir (5.7)

$$\mathbf{a}_i(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{a}_i(t) + \mathbf{e}(t) \times \mathbf{a}_i(t)\mathrm{d}\phi. \tag{22.6}$$

Dabei ist $\mathbf{e}$ der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse und $\mathrm{d}\phi$ der infinitesimale Drehwinkel. Durch Differenzieren nach der Zeit erhalten wir

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}_i \text{ mit } \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}(t)\dot{\phi}. \tag{22.7}$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ ist die Richtung der Drehachse (Rechtsschraube), der Betrag von $\boldsymbol{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$. Insgesamt haben wir

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i. \tag{22.8}$$

22.b Impuls und Energie im homogenen Gravitationsfeld

Der Gesamtimpuls $\mathbf{P}$ des starren Körpers ergibt sich zu

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i) = \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}_{\mathbf{0}}, \tag{22.9}$$

also

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}. \tag{22.10}$$

Für die potentielle Energie im homogenen Gravitationsfeld erhalten wir

$$\mathcal{V} = \sum_i m_i g z_i = \sum_i m_i g (Z + a_{iz}) = MgZ, \tag{22.11}$$

wobei Z die z-Komponente von $\mathbf{R}$ ist. Impuls und potentielle Energie lassen sich also durch die Schwerpunktskoordinaten ausdrücken.

22.c Kinetische Energie

Wir betrachten nun die kinetische Energie

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i)^2 && (22.12)\\
&= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}^2 + \sum_i m_i \mathbf{V}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i)^2 \\
&= \underbrace{\frac{M}{2}\mathbf{V}^2}_{\text{Translationsenergie}} + \mathbf{V}(\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}_{\mathbf{0}}) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i)^2}_{\text{Rotationsenergie}}.
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen, der Translationsenergie, gegeben durch die Schwerpunktsbewegung, und der Rotationsenergie.

Wir beobachten, dass

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i| = \omega a_{i\perp}, \tag{22.13}$$

wobei $a_{i\perp}$ der Abstand von der Drehachse ist, die durch den Schwerpunkt gelegt wurde. Wir führen daher das Trägheitsmoment Θ^0 bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt

$$\Theta^0 = \sum_i m_i a_{i\perp}^2 \tag{22.14}$$

ein und erhalten für die Rotationsenergie

$$\mathcal{T}_{\rm rot} = \frac{1}{2}\Theta^0\omega^2. \tag{22.15}$$

Wir formen den Ausdruck für die Rotationsenergie noch um

$$\mathcal{T}_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega^2 a_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}_i)^2) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\omega_\alpha I^0_{\alpha\beta}\omega_\beta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{I}^0\boldsymbol{\omega}). \tag{22.16}$$

Dabei ist

$$\mathbf{I}^0 = \mathbf{e}_\alpha)I^0_{\alpha\beta}(\mathbf{e}_\beta \tag{22.17}$$

der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts mit den Komponenten

$$I^0_{\alpha\beta} = \sum_i m_i(a_i^2\delta_{\alpha\beta} - a_{i\alpha}a_{i\beta}). \tag{22.18}$$

Schreiben wir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}$, so folgt

$$\mathcal{T}_{\rm rot} = \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{e}\mathbf{I}^0\mathbf{e}), \tag{22.19}$$

woraus

$$\Theta^0 = (\mathbf{e}\mathbf{I}^0\mathbf{e}) \tag{22.20}$$

folgt.

22.d Drehimpuls

Für den Drehimpuls erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i(\mathbf{R}+\mathbf{a}_i)\times m_i(\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_i) \qquad (22.21)\\
&= \sum_i m_i\mathbf{R}\times\mathbf{V} + \underbrace{\sum_i m_i\mathbf{a}_i}_{\mathbf{0}}\times\mathbf{V} + \mathbf{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\underbrace{\sum_i m_i\mathbf{a}_i}_{\mathbf{0}})\\
&\quad + \sum_i m_i\mathbf{a}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_i).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zwei Anteile des Drehimpulses

$$\mathbf{L} = \underbrace{M\mathbf{R}\times\mathbf{V}}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\sum_i m_i\mathbf{a}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_i)}_{\text{innerer Drehimpuls}}. \tag{22.22}$$

Mit

$$\mathbf{a}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}) = a^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{a} \tag{22.23}$$

folgt

$$\begin{aligned} L_\alpha &= M(\mathbf{R}\times\mathbf{V})_\alpha + \sum_i m_i(a_i^2\omega_\alpha - (\mathbf{a}_i\boldsymbol{\omega})a_{i\alpha}) \\ &= M(\mathbf{R}\times\mathbf{V})_\alpha + \sum_\beta \underbrace{\sum_i m_i(a_i^2\delta_{\alpha\beta} - a_{i\alpha}a_{i\beta})}_{I^0_{\alpha\beta}}\,\omega_\beta, \end{aligned} \tag{22.24}$$

also

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R}\times\mathbf{V} + \mathbf{I}^0\boldsymbol{\omega}. \tag{22.25}$$

Im Allgemeinen ist $\mathbf{L}$ nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, selbst wenn $\mathbf{R}\times\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Für die Komponente parallel zur Drehachse erhält man

$$L_\parallel = (\mathbf{e}\mathbf{L}) = M\mathbf{e}(\mathbf{R}\times\mathbf{V}) + \underbrace{(\mathbf{e}\mathbf{I}^0\mathbf{e})}_{\Theta^0}\,\omega. \tag{22.26}$$

22.e Reine Drehung um Achse durch den Ursprung

Wir betrachten eine reine Drehung um den Ursprung. Dann ist $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$ und

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}M(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})^2 + \frac{1}{2}\Theta^0\omega^2. \tag{22.27}$$

Wir erhalten daher

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \text{ mit } \Theta = M(\mathbf{e}\times\mathbf{R})^2 + \Theta^0. \tag{22.28}$$

Nun ist $R_\perp = |\mathbf{e}\times\mathbf{R}|$ der Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. Damit erhalten wir den Steinerschen Satz

$$\Theta = MR_\perp^2 + \Theta^0. \tag{22.29}$$

Wir bemerken noch

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega^2 x_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}_i)^2) = \frac{1}{2}\omega_\alpha I_{\alpha\beta}\omega_\beta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \tag{22.30}$$

mit

$$I_{\alpha\beta} = \sum m_i(x_i^2\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}). \tag{22.31}$$

Zerlegt man $\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{a}_i$, so folgt

$$I_{\alpha\beta} = I^0_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}MR^2 - MR_\alpha R_\beta. \tag{22.32}$$

Man findet

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}. \tag{22.33}$$

23 Trägheitstensor

23.a Zur Berechnung

23.a.α Kontinuierliche Massenverteilung

Wir gehen nun zu einer kontinuierlichen Massenverteilung über. Dazu ersetzen wir die Summation über die Massen durch die Integration über die Masse, was dann als Volumenintegral mit $\mathrm{d}m = \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x})$ mit der Massendichte $\rho(\mathbf{x})$ ausgewertet wird. Wir haben also

$$\sum_i m_i ... \to \int \mathrm{d}m ... = \int \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x}) ... \tag{23.1}$$

zu ersetzen. Damit erhalten wir die Darstellung für die Trägheitstensoren und Trägheitsmomente

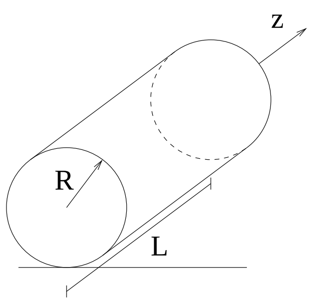
$$I^0_{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x})(\delta_{\alpha\beta}a^2 - a_\alpha a_\beta), \tag{23.2}$$

$$I_{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x})(\delta_{\alpha\beta}x^2 - x_\alpha x_\beta) \tag{23.3}$$

$$\Theta^0 = \int \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x})\mathbf{a}^2_\perp \tag{23.4}$$

$$\Theta = \int \mathrm{d}^3x\rho(\mathbf{x})\mathbf{x}^2_\perp. \tag{23.5}$$

23.a.β Rollender Zylinder

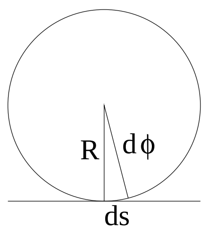


Wir betrachten nun einen rollenden Zylinder (Länge L und Radius R). Seine kinetische Energie ist

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I^0_{zz}\omega^2. \tag{23.6}$$

Beim Abrollen auf einer Ebene findet man $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\phi$ und damit den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

$$V = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = R\omega \tag{23.7}$$



Damit können wir die kinetische Energie ausdrücken als

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I^0_{zz}}{R^2}\right)V^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(MR^2 + I^0_{zz})}_{I_{zz}}\omega^2. \tag{23.8}$$

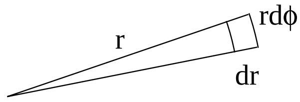
Wir nehmen an, dass die Massendichte des Zylinders homogen ist und berechnen das Trägheitsmoment

$$I_{zz}^0 = \rho \int \mathrm{d}^3x(x^2+y^2). \tag{23.9}$$

Hierbei verwenden wir zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z. \tag{23.10}$$

Zur Berechnung des Volumenelements haben wir die Jacobi-Determinante zu bestimmen. Mit



$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{23.11}$$

Damit erhalten wir für das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3x = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z. \tag{23.12}$$

Für $\Theta^0 = I_{zz}^0$ folgt mit $x^2+y^2 = r^2$

$$I_{zz}^0 = \rho\int_0^L \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r\, r^2 = \rho L \frac{R^4}{4} 2\pi. \tag{23.13}$$

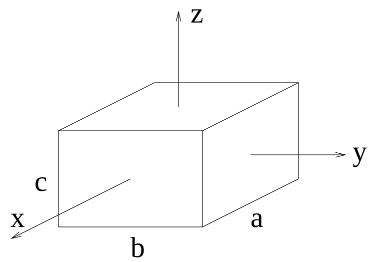
Die Masse des Zylinders ist $M = \rho L \pi R^2$, so dass wir

$$\Theta^0 = I_{zz}^0 = \frac{1}{2}MR^2, \quad \Theta = I_{zz} = \Theta^0 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2, \quad \mathcal{T} = \frac{3}{4}MV^2 \tag{23.14}$$

erhalten.

23.a.γ Quader

Für einen Quader mit homogener Dichte ρ der Seitenlängen a, b, c mit Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt erhält man



$$\begin{aligned} I_{xx}^0 &= \rho\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\int_{-c/2}^{c/2}\mathrm{d}z(y^2+z^2) \\ &= \rho ac\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y y^2 + \rho ab\int_{-c/2}^{c/2}\mathrm{d}z z^2 \\ &= \rho abc\left(\frac{b^2}{12}+\frac{c^2}{12}\right) = \frac{M}{12}(b^2+c^2), \qquad (23.15) \\ I_{xy}^0 &= \rho\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\int_{-c/2}^{c/2}\mathrm{d}z xy = 0. \qquad (23.16) \end{aligned}$$

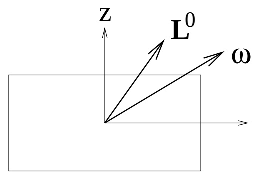
Damit erhalten wir

$$I^0 = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}. \tag{23.17}$$

Der Tensor ist diagonal. Für den inneren Drehimpuls $\mathbf{L}^0 = \mathbf{I}^0\boldsymbol{\omega}$ folgt

$$L_x^0 = I_{xx}^0\omega_x, \quad L_y^0 = I_{yy}^0\omega_y, \quad L_z^0 = I_{zz}^0\omega_z. \tag{23.18}$$

Falls $b > c$, dann ist $I_{zz}^0 > I_{yy}^0$, so dass man anschaulich die folgende Beziehung zwischen $\mathbf{L}^0$ und $\boldsymbol{\omega}$ hat:



23.b Transformationseigenschaften des Trägheitstensors

Wir stellen die Vektoren im körperfesten und im raumfesten Koordinatensystem dar

$$\mathbf{a} = \underbrace{a_\alpha \mathbf{e}_\alpha}_{\text{raumfest}} = \underbrace{a'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha}_{\text{körperfest}}, \tag{23.19}$$

wobei (vgl. Abschnitt 1.c)

$$a'_\alpha = A_{\alpha\gamma}a_\gamma, \quad a_\gamma = A_{\alpha\gamma}a'_\alpha, \quad A_{\alpha\gamma} = (\mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}_\gamma). \tag{23.20}$$

Damit transformieren wir nun den Trägheitstensor zwischen den beiden Systemen

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i(a_i^2\delta_{\alpha\beta} - a'_{i\alpha}a'_{i\beta}). \tag{23.21}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} a'_{i\alpha}a'_{i\beta} &= A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}a_{i\gamma}a_{i\delta}, && (23.22)\\ a_i'^2 &= a_i^2, && (23.23)\\ \delta_{\alpha\beta} &= (AA^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma}A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}\delta_{\gamma\delta}. && (23.24) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$I'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}\sum_i(a_i^2\delta_{\gamma\delta} - a_{i\gamma}a_{i\delta}) = A_{\alpha\gamma}I_{\gamma\delta}A_{\beta\delta}, \tag{23.25}$$

also

$$I' = AIA^{\mathrm{T}}. \tag{23.26}$$

Eine Matrix I, deren neun Komponenten $I_{\alpha\beta}$ sich unter orthogonalen Koordinaten-Transformationen $x' = Ax$ gemäß $I' = AIA^{\mathrm{T}}$ transformieren, besteht aus den Komponenten eines Tensors.

Entsprechend: Eine dreikomponentige Größe p, deren Komponenten p_α sich unter orthogonalen Koordinaten-Transformationen $x' = Ax$ gemäß $p' = Ap$ transformieren, besteht aus den Komponenten eines Vektors.[5]
Eine Größe s, die unter orthogonalen Koordinaten-Transformationen invariant ist, heißt Skalar.

Man unterscheide zwischen der Koeffizienten-Matrix I und dem Tensor $\mathbf{I}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \sum_i m_i \left[a_i^2 \mathbb{1} - \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_i\right] \\
&= \mathbf{e}_\gamma) I_{\gamma\delta} (\mathbf{e}_\delta \;=\; \mathbf{e}'_\alpha) I'_{\alpha\beta} (\mathbf{e}'_\beta, \qquad (23.27) \\
I_{\gamma\delta} &= (\mathbf{e}_\gamma \mathbf{I} \mathbf{e}_\delta), \qquad (23.28) \\
I'_{\alpha\beta} &= (\mathbf{e}'_\alpha \mathbf{I} \mathbf{e}'_\beta) = (\mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}_\gamma) I_{\gamma\delta} (\mathbf{e}_\delta \mathbf{e}'_\beta) = A_{\alpha\gamma} I_{\gamma\delta} A_{\beta\delta}. \qquad (23.29)
\end{aligned}
$$

Für den inneren Drehimpuls $\mathbf{L}^0$ gilt

$$
L'^0 = I'^0 \omega' = A I^0 A^{\mathrm{T}} \omega' = \pm A I^0 \omega = \pm A L^{\mathrm{inn}}, \quad \det A = \pm 1. \qquad (23.30)
$$

Man beachte, dass $\boldsymbol{\omega}$ ein axialer Vektor ist, für den $\omega' = \pm A\omega$ gilt, wobei das Vorzeichen gleich dem Vorzeichen von $\det A$ ist. Daher ist auch $\mathbf{L}^0$ ein axialer Vektor.

Trägheitstensor der Kugel Eine Kugel ist unter Rotationen invariant. Daher ist $I'^0 = I^0$. Insbesondere folgt unter einer Drehung um die z-Achse um 90^0 mit

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (23.31)
$$

$$
\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} A^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} I_{yy} & -I_{yx} & I_{yz} \\ -I_{xy} & I_{xx} & -I_{xz} \\ I_{zy} & -I_{zx} & I_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (23.32)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $I_{xx} = I_{yy}$, $I_{xy} = -I_{yx}$, $I_{xz} = I_{yz} = -I_{xz}$ etc. Die Außerdiagonal-Matrixelemente (Deviations-Momente) sind daher alle gleich Null. Die Diagonalelemente sind alle gleich, da wir natürlich auch um die y- oder z-Achse eine Drehung vornehmen können

$$
\begin{aligned}
I^0_{xx} = I^0_{yy} = I^0_{zz} &= \int \mathrm{d}^3 x \rho (x^2 + y^2) = \frac{2}{3} \int \mathrm{d}^3 x \rho r^2 = \frac{2\rho}{3} \int \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}r^2 r^2 \\
&= \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^R \mathrm{d}r r^4 = \frac{8\pi\rho R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5}. \qquad (23.33)
\end{aligned}
$$

[5] Tatsächlich sind $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{B}$ axiale Vektoren, während $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{E}$ polare Vektoren sind. Sie alle transformieren sich unter speziellen orthogonalen Transformationen ($\det A = +1$) gleich. Unter Inversion (Spiegelung am Ursprung) gehen polare Vektoren in ihr Negatives über, während axiale Vektoren invariant sind. $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \to \mathbf{L} = (-\mathbf{x}) \times (-\mathbf{p})$.

Das heißt für die Kugel der Masse M und dem Radius R erhält man

$$\mathbf{I} = \frac{2}{5} M R^2 \mathbb{1}. \tag{23.34}$$

23.c Hauptachsen-Transformationen

Für welche Richtungen ist der innere Drehimpuls $\mathbf{L}^0$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}$? Das heißt wir suchen Einheitsvektoren $\mathbf{p}$, für die $\mathbf{I}^0\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ gilt. Dies ist ein Eigenwert-Problem. Es sei $\mathbf{p}$ nicht-triviale Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$\mathbf{I}^0\mathbf{p} - \lambda\mathbf{p} = 0, \quad (I^0_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta})p_\beta = 0. \tag{23.35}$$

Diese Gleichung hat eine nicht-triviale Lösung, falls

$$\det(I^0 - \lambda\mathbb{1}) = 0. \tag{23.36}$$

oder

$$\begin{vmatrix} I^0_{11} - \lambda & I^0_{12} & I^0_{13} \\ I^0_{21} & I^0_{22} - \lambda & I^0_{23} \\ I^0_{31} & I^0_{32} & I^0_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{23.37}$$

Diese Eigenwert-Gleichung ist eine kubische Gleichung für λ mit drei Lösungen λ^i und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{p}^i$.

Alle Eigenwerte sind reell, da I^0 symmetrisch und reell ist, $I^0_{\gamma\delta} = I^0_{\delta\gamma}$. Es sei

$$I^0_{\gamma\delta}p_\delta = \lambda p_\gamma. \tag{23.38}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} p^*_\gamma I^0_{\gamma\delta}p_\delta &= \lambda p^*_\gamma p_\gamma = \lambda \cdot \text{positive Zahl} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{(p^*_\gamma p_\delta + p^*_\delta p_\gamma)}_{\text{reell}}\underbrace{I^0_{\gamma\delta}}_{\text{reell}} = \text{reelle Zahl}. \end{aligned} \tag{23.39}$$

Daher sind alle Eigenwerte reell und die $\mathbf{p}$ können reell gewählt werden.

Die Vektoren $\mathbf{p}^i$, $\mathbf{p}^j$ stehen senkrecht auf einander, falls $\lambda^i \neq \lambda^j$. Man zeigt das folgendermaßen:

$$(\mathbf{p}^i\mathbf{I}\mathbf{p}^j) = \lambda^j(\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j) = (\mathbf{p}^j\mathbf{I}\mathbf{p}^i) = \lambda^i(\mathbf{p}^j \cdot \mathbf{p}^i). \tag{23.40}$$

Daraus folgt

$$(\lambda^j - \lambda^i)(\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j) = 0 \tag{23.41}$$

und daher gilt entweder $\lambda^j = \lambda^i$ oder $(\mathbf{p}^i \cdot \mathbf{p}^j) = 0$.

Man kann stets $\mathbf{p}^j \cdot \mathbf{p}^i = \delta_{ji}$ wählen und erhält damit ein orthonormiertes System von Vektoren $\mathbf{p}$. Die Richtungen der $\mathbf{p}^i$ sind die Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Sie sind körperfest. Die λ^i heißen Hauptträgheitsmomente. Offensichtlich ist

$$\mathbf{I}^0 = \sum_i \mathbf{p}^i)\lambda^i(\mathbf{p}^i, \quad I^0_{\alpha\beta} = \sum_i p^i_\alpha \lambda^i p^i_\beta. \tag{23.42}$$

Wir wählen das körperfeste System so, dass I'^0 diagonal ist,

$$I'^0 = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'^0_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'^0_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'^0_{33} \end{pmatrix}. \tag{23.43}$$

Dann ist

$$I^0 = A^{\mathrm{T}} I'^0 A, \quad I^0_{\alpha\beta} = A_{\gamma\alpha} I'^0_{\gamma\delta} A_{\delta\beta} = \sum_\gamma A_{\gamma\alpha}\lambda_\gamma A_{\gamma\beta} \tag{23.44}$$

und wir identifizieren $p^i_\alpha = A_{i\alpha}$. Aus der Orthogonalität der $\mathbf{p}$ folgt

$$\mathbf{p}^\alpha \cdot \mathbf{p}^\beta = p^\alpha_\gamma p^\beta_\gamma = A_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma} = (AA^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{23.45}$$

Daher lässt sich I^0 durch eine orthogonale Transformation A auf Diagonalgestalt I'^0 bringen. Die orthogonale Transformation A ist durch die Eigenvektoren von I^0 gegeben (die Zeilen von A und die Spalten von A^{T} sind die Eigenvektoren p).

23.c.α Beispiele

Es sei

$$I^0 = \begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} [\mathrm{gcm}^2] \tag{23.46}$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = [(5-\lambda)(3-\lambda)-\frac{9}{16}](4-\lambda) = [(\lambda-4)^2-\frac{25}{16}](4-\lambda) = 0. \tag{23.47}$$

Daraus folgen die drei Lösungen

$$\lambda^1 = I'^0_{11} = \frac{21}{4}, \quad \lambda^2 = I'^0_{22} = \frac{11}{4}, \quad \lambda^3 = I'^0_{33} = 4 \tag{23.48}$$

jeweils in gcm^2. Die Eigenvektoren bestimmt man zu

$$p^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.49}$$

Man unterscheidet:
a) Kugelkreisel $I'^0_{11} = I'^0_{22} = I'^0_{33}$,
b) Symmetrische Kreisel $I'^0_{11} = I'^0_{22} \neq I'^0_{33}$,
c) Unsymmetrische Kreisel $I'^0_{11} \neq I'^0_{22} \neq I'^0_{33} \neq I'^0_{11}$.
Wenn alle Massen in einer Ebene liegen (x', y'), gilt $I'_{11} + I'_{22} = I'_{33}$.
Wenn alle Massen auf einer Gerade liegen (z'), dann gilt $I'_{11} = I'_{22}$, $I'_{33} = 0$.
Allgemein gilt

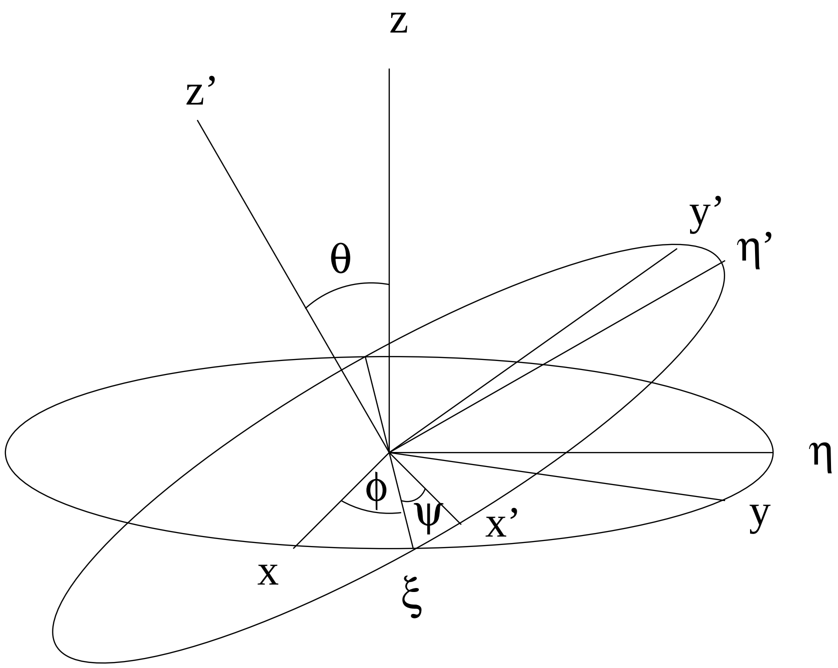
$$I'_{11} \geq 0, \quad I'_{11} + I'_{22} \geq I'_{33} \tag{23.50}$$

und auch für permutierte Indices.

24 Bewegungsgleichungen und Euler-Winkel

24.a Euler-Winkel

Wir führen die Transformation vom raumfesten Koordinatensystem (x, y, z) auf das körperfeste Koordinatensystem (x', y', z') durch drei aufeinander folgende Rotationen durch und zwar
a) um die z-Achse um den Winkel ϕ. Dabei gehen x- und y-Achse in die ξ und η-Achse über.
b) um die ξ-Achse um den Winkel θ. Dabei gehen η- und z-Achse in η'- und z'-Achse über und schließlich
c) um die z'-Achse um den Winkel ψ. Dabei gehen ξ- und η'-Achse in die x'- und y'-Achse über.
Die drei Winkel ϕ, θ und ψ sind die Euler-Winkel.



Ausgedrückt durch Transformations-Matrizen lautet die Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta' \\ z' \end{pmatrix} = A^{(3)}(\psi) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{24.1}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = A^{(1)}(\theta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{pmatrix}. \tag{24.2}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{(3)}(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{24.3}$$

Damit ergibt sich die gesamte Transformation zu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(\psi,\theta,\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A(\psi,\theta,\phi) = A^{(3)}(\psi)A^{(1)}(\theta)A^{(3)}(\phi). \tag{24.4}$$

A ist eine orthogonale Transformation, $AA^T = A^TA = \mathbb{1}$ mit der Rücktransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^T(\psi,\theta,\phi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{24.5}$$

$$\begin{aligned} A^T(\psi,\theta,\phi) &= A^{(3)T}(\phi)A^{(1)T}(\theta)A^{(3)T}(\psi) \\ &= A^{(3)}(-\phi)A^{(1)}(-\theta)A^{(3)}(-\psi) = A(-\phi,-\theta,-\psi). \end{aligned} \tag{24.6}$$

Wir können hieraus die Winkelgeschwindigkeit bestimmen

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\mathbf{e}_z + \dot\theta\mathbf{e}_\xi + \dot\psi\mathbf{e}'_z. \tag{24.7}$$

Die Beiträge lassen sich superponieren, da

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\phi\mathbf{e}_z\times\mathbf{x} + \mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\xi\times\mathbf{x} + \mathrm{d}\psi\mathbf{e}'_z\times\mathbf{x} = (\dot\phi\mathbf{e}_z + \dot\theta\mathbf{e}_\xi + \dot\psi\mathbf{e}'_z)\times\mathbf{x}\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}\mathrm{d}t. \tag{24.8}$$

Wir berechnen $\boldsymbol{\omega}$ im körperfesten System. Mit

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}'_z + \sin\theta\mathbf{e}'_\eta, \tag{24.9}$$

$$\mathbf{e}'_\eta = \cos\psi\mathbf{e}'_y + \sin\psi\mathbf{e}'_x, \tag{24.10}$$

$$\mathbf{e}_\xi = \cos\psi\mathbf{e}'_x - \sin\psi\mathbf{e}'_y \tag{24.11}$$

folgt

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}'_z + \sin\theta\cos\psi\mathbf{e}'_y + \sin\theta\sin\psi\mathbf{e}'_x \tag{24.12}$$

und damit

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_x\mathbf{e}'_x + \omega'_y\mathbf{e}'_y + \omega'_z\mathbf{e}'_z, \tag{24.13}$$

$$\omega'_x = \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi, \tag{24.14}$$

$$\omega'_y = -\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi, \tag{24.15}$$

$$\omega'_z = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi. \tag{24.16}$$

24.b Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Wir betrachten einen kräftefreien Kreisel, das heißt einen Kreisel, den wir im Schwerpunkt unterstützen. Weiterhin sei er symmetrisch, das heißt zwei

Hauptträgheitsmomente seien gleich, $I'_1 = I'_2$. (Wir schreiben jetzt die Hauptträgheitsmomente nur noch mit einem Index). Dann erhalten wir die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} = \frac{1}{2}I'_1(\omega_x'^2 + \omega_y'^2) + \frac{1}{2}I'_3\omega_z'^2 = \frac{1}{2}I'_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I'_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2. \tag{24.17}$$

Offensichtlich sind ψ und ϕ zyklische Variable. Also sind p_ψ und p_ϕ erhalten. Was sind die verallgemeinerten Impulse p_α, wobei α für einen der Winkel ψ, θ oder ϕ steht?

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\alpha}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{I}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\alpha}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\alpha}\cdot\mathbf{L}. \tag{24.18}$$

Daraus folgt

$$p_\psi = \mathbf{e}'_z\mathbf{L} = L'_z, \quad p_\phi = \mathbf{e}_z\mathbf{L} = L_z. \tag{24.19}$$

Für den kräftefreien Kreisel sind natürlich die Komponenten des Drehimpulses im ortsfesten System erhalten (L_z). Für den symmetrischen Kreisel ist auch die Drehimpulskomponente in Richtung Figurenachse erhalten (L'_z). Wir legen nun die z-Achse in Richtung des Drehimpulses $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z$. Dann ist $L'_z = L\cos\theta$. Da L und L'_z konstant sind, folgt, dass auch $\cos\theta$ konstant ist. Der Winkel zwischen Figurenachse und $\mathbf{L}$ ist also erhalten. Aus

$$L_z = L \quad = \quad p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = I'_1\sin^2\theta\,\dot\phi + I'_3\cos\theta(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta), \tag{24.20}$$

$$L'_z \quad = \quad p_\psi = I'_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) \tag{24.21}$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot\phi &= \frac{L}{I'_1} && \text{Nutation (reg. Präzession) der Figurenachse} \\ \dot\psi &= \left(\frac{L}{I'_3} - \frac{L}{I'_1}\right)\cos\theta && \text{zusätzliche Rotation um die Figurenachse} \end{aligned} \tag{24.22}$$

Beide Winkel wachsen als proportional zur Zeit an.

24.c Zum schweren symmetrischen Kreisel

Es seien nun $I'_1 = I'_2$, I'_3 die Hauptträgheitsmomente bezüglich des Unterstützungspunktes, m die Masse des Kreisels, s der Abstand vom Schwerpunkt zum Unterstützungspunkt, wobei letzterer auf der Symmetrieachse liege. Dann tritt zu der kinetischen Energie noch die potentielle

$$\mathcal{V} = mgs\cos\theta \tag{24.23}$$

hinzu. $p_\phi = L$ und $p_\psi = L'_z$ sind weiterhin Erhaltungsgrößen, woraus

$$\dot\phi \quad = \quad \frac{L_z - L'_z\cos\theta}{I'_1\sin^2\theta}, \tag{24.24}$$

$$\dot\psi \quad = \quad \frac{L'_z}{I'_3} - \dot\phi\cos\theta \tag{24.25}$$

folgt. Mit Hilfe des Energiesatzes

$$E = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} I_1' \dot{\theta}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}, \qquad (24.26)$$

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} = mgs\cos\theta + \frac{(L_z - L_z'\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} + \frac{L_z'^2}{2I_3'}. \qquad (24.27)$$

berechnet man $\theta(t)$, das periodisch oszilliert. Dies setzt man in (24.24) und (24.25) ein und berechnet ϕ und ψ. Die periodische Veränderung von θ wird als Nutation bezeichnet.

25 Bewegungs-Gleichungen und Eulersche Gleichungen

25.a Bewegungs-Gleichungen im raumfesten Bezugssystem

Wir betrachten die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Da die Zeitableitung des Impulses gleich der Kraft ist, folgt als erste Bewegungsgleichung die für den Schwerpunkt des Systems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{V}} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}. \tag{25.1}$$

Die Änderung des Drehimpulses wird durch das Drehmoment gegeben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{K}. \tag{25.2}$$

Ist die Drehung auf den Ursprung bezogen, so folgt mit $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{K}, \tag{25.3}$$

wobei im Scherefeld der Erde $\mathbf{K} = M\mathbf{R} \times \mathbf{g}$ ist. Allgemein haben wir

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{I}^0\boldsymbol{\omega}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F} \tag{25.4}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{I}^0\boldsymbol{\omega}) = \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i =: \mathbf{K}^0. \tag{25.5}$$

Das heißt auf die Rotation des Körpers wirkt sich das Drehmoment $\mathbf{K}^0$ bezogen auf den Schwerpunkt aus.

25.b Transformation der Zeitableitung eines Vektors vom raumfesten auf das körperfeste Bezugssystem

Wir transformieren nun die Zeitableitung eines Vektors vom raumfesten auf das körperfeste Bezugssystem und bezeichnen mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die Differentiation im raumfesten, mit $\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}$ im körperfesten Bezugssystem. Wir betrachten einen Vektor

$$\mathbf{S} = S_\alpha \mathbf{e}_\alpha = S'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha. \tag{25.6}$$

Im raumfesten System ist $\mathbf{e}_\alpha$ zeitunabhängig, im körperfesten $\mathbf{e}'_\alpha$. Daher gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\alpha}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}'\mathbf{e}'_\alpha}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{25.7}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_\alpha \mathbf{e}_\alpha) = \frac{\mathrm{d}S_\alpha}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\alpha \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}S'_\alpha}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}'_\alpha}_{\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}} + S'_\alpha \underbrace{\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_\alpha}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}'_\alpha},
\end{aligned}
\tag{25.8}
$$

Daraus erhalten wir das Ergebnis

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}. \tag{25.9}
$$

25.c Euler-Gleichungen

Wir wenden diese Beziehung nun auf die Bewegungsgleichung für die Rotation $\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{K}$ des starren Körpers an, die wir im körperfesten System betrachten wollen, da dort die Hauptträgheitsmomente zeitunabhängig sind,

$$
\frac{\mathrm{d}L'_\alpha}{\mathrm{d}t} + (\omega \times \mathbf{L})'_\alpha = K'_\alpha \tag{25.10}
$$

oder für die erste Komponente

$$
\frac{\mathrm{d}L'_1}{\mathrm{d}t} + \omega'_2 L'_3 - \omega'_3 L'_2 = K'_1. \tag{25.11}
$$

Setzen wir nun $L'_\alpha = I_\alpha \omega'_\alpha$, wobei diesmal die Einsteinsche Summenkonvention nicht angewendet wird, und wir den Strich am I weglassen, dann folgt

$$
I_1 \frac{\mathrm{d}\omega'_1}{\mathrm{d}t} + (I_3 - I_2)\omega'_2\omega'_3 = K'_1, \tag{25.12}
$$

$$
I_2 \frac{\mathrm{d}\omega'_2}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_3)\omega'_3\omega'_1 = K'_2, \tag{25.13}
$$

$$
I_3 \frac{\mathrm{d}\omega'_3}{\mathrm{d}t} + (I_2 - I_1)\omega'_1\omega'_2 = K'_3. \tag{25.14}
$$

Diese Gleichungen werden als Eulersche Gleichungen bezeichnet.

Unsymmetrischer kräftefreier Kreisel Wir wollen diese Gleichungen anwenden auf einen unsymmetrischen kräftefreien Kreisel, der momentan um eine Achse fast parallel zur 3'-Achse rotiert, d.h. $\omega'_1, \omega'_2 \ll \omega'_3$. Dann ist ω'_3 zumindest für eine Weile praktisch konstant und wir erhalten die Bewegungsgleichungen

$$
I_1\dot{\omega}'_1 = (I_2 - I_3)\omega'_3\omega'_2, \quad I_2\dot{\omega}'_2 = (I_3 - I_1)\omega'_3\omega'_1, \tag{25.15}
$$

woraus

$$
\ddot{\omega}'_1 = \lambda^2\omega'_1 \text{ mit } \lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}\omega'^2_3 \tag{25.16}
$$

mit der Lösung

$$\omega'_1 = a\mathrm{e}^{\lambda t} + b\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{25.17}$$

folgt. Falls I_3 das größte oder das kleinste der drei Trägheitsmomente ist, dann ist λ^2 negativ und ω'_1 und ω'_2 vollführen kleine Oszillationen der Frequenz $|\lambda|$. Falls I_3 jedoch das mittlere der drei Trägheitsmomente ist, ist λ^2 positiv und die ω'_1 und ω'_2 werden exponentiell anwachsen. Dann ist die Rotation um die 3'-Achse instabil.

Dies kann man auch den Erhaltungsgrößen entnehmen. Aus der Erhaltung des Quadrats des Drehimpulses

$$L^2 = L'^2_1 + L'^2_2 + L'^2_3 = I_1^2\omega'^2_1 + I_2^2\omega'^2_2 + I_3^2\omega'^2_3 \tag{25.18}$$

und der Rotationsenergie

$$2E = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = I_1\omega'^2_1 + I_2\omega'^2_2 + I_3\omega'^2_3 \tag{25.19}$$

folgt nach Elimination von ω'_3

$$L^2 - 2I_3E = I_1(I_1 - I_3)\omega'^2_1 + I_2(I_2 - I_3)\omega'^2_2. \tag{25.20}$$

Falls $L^2 - 2I_3E$ klein ist und falls I_3 größtes oder kleinstes Hauptträgheitsmoment ist, beschreibt Gleichung (25.20) eine Ellipse in der (ω'_1, ω'_2)-Ebene, was die Maximal-Ausschläge beschränkt. Falls I_3 jedoch das mittlere Trägheitsmoment ist, dann beschreibt (25.20) eine Hyperbel in der (ω'_1, ω'_2)-Ebene, das heißt ω'_1 und ω'_2 können stark anwachsen.

Ein derartiger Fall liegt beim Saturn-Mond Hyperion mit den Abmessungen 190 km × 145 km × 114 km vor, wobei dort allerdings das Drehmoment auf Grund der Gravitation von Saturn nicht zu vernachlässigen ist (die Gravitations-Beschleunigung kann nicht als konstant über den ganzen Mond angesehen werden; es wirken daher Gezeiten-Kräfte). Die Torkel-Bewegung ist so chaotisch (siehe Scheck, Mechanik), dass eine Messung der räumlichen Orientierung der Drehachse auf 10 Stellen genau (tatsächlich kann diese Genauigkeit nicht erreicht werden) beim Vorbeiflug von Voyager im November 1980 nicht ausreichend gewesen wäre, die Orientierung Hyperions beim Vorbeiflug von Voyager 2 im August 1981 vorherzusagen.