14 Lagrange-Gleichungen erster Art

14.a Bewegungsgleichungen

Wir gehen aus von r Zwangsbedingungen, die holonom

$$f^{(k)}(\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_n, t) = 0 \tag{14.1}$$

oder nicht holonom

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i^{(k)} \mathrm{d}\mathbf{x}_i = a_0^{(k)} \mathrm{d}t \tag{14.2}$$

sind. Den holonomen Fall behandeln wir wie den nicht holonomen durch Einführung von

$$\mathbf{a}_i^{(k)} = \mathrm{grad}_{\,i} f^{(k)}, \quad a_0^{(k)} = -\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}. \tag{14.3}$$

Die virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{x}_i$ genügen

$$\sum_i \mathbf{a}_i^{(k)} \delta\mathbf{x}_i = 0. \tag{14.4}$$

Man beachte dass der a_0-Term wegfällt, da wir die Verrückungen bei konstanter Zeit betrachten. Für die Zwangskräfte gilt gemäß des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{Z}_i \delta\mathbf{x}_i = 0. \tag{14.5}$$

Daher sind die $\mathbf{Z}_i$ Linearkombinationen der $\mathbf{a}_i^{(k)}$,

$$\mathbf{Z}_i = \sum_k \lambda^{(k)} \mathbf{a}_i^{(k)}. \tag{14.6}$$

Daraus folgen dann die Lagrange-Gleichungen erster Art

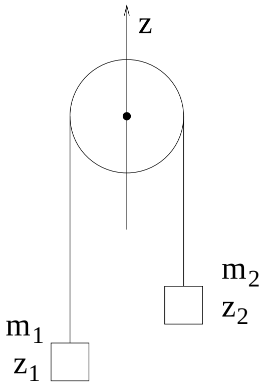
$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_k \lambda^{(k)} \mathbf{a}_i^{(k)}. \tag{14.7}$$

Dabei sind die $\lambda^{(k)}(t)$ so zu wählen, dass die Zwangsbedingungen erfüllt sind

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i^{(k)} \dot{\mathbf{x}}_i = a_0^{(k)}, \quad k = 1...r. \tag{14.8}$$

Damit hat man $3N + r$ Gleichungen für $3N$ Koordinaten $x_{i\alpha}$ und r Multiplikatoren $\lambda^{(k)}$.

14.b Beispiel: Atwoodsche Fallmaschine



Zwei Massen sind durch ein Seil, das über eine Rolle läuft, miteinander verbunden. Die Lage der beiden Massen ist durch die Zwangsbedingung

$$f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 - c = 0 \tag{14.9}$$

eingeschränkt. Wir finden daraus

$$\underbrace{1}_{a_1} \cdot \mathrm{d}z_1 + \underbrace{1}_{a_2} \cdot \mathrm{d}z_2 = 0. \tag{14.10}$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda a_1 = -m_1 g + \lambda, \tag{14.11}$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda a_2 = -m_2 g + \lambda. \tag{14.12}$$

Durch Vergleich mit (14.6) sieht man, dass λ die Seilkraft ist. Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = -2g + \frac{\lambda}{m_1} + \frac{\lambda}{m_2}. \tag{14.13}$$

Da $z_1 + z_2$ konstant sein muss, sind beide Seiten der Gleichung 0, woraus

$$\lambda = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{14.14}$$

folgt. Damit erhalten wir

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \tag{14.15}$$

was sich leicht integrieren lässt.

15 Hamiltonsches Prinzip

15.a Das Prinzip

Wir formulieren zunächst das Prinzip: Die Bewegung eines Systems von Massenpunkten zwischen zwei Lagen zu vorgegebenen Zeiten ($q_1^{(1)}$, ..., $q_m^{(1)}$, t_1) und ($q_1^{(2)}$, ..., $q_m^{(2)}$, t_2) ist derart, dass die Wirkung

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \mathrm{d}t \tag{15.1}$$

ein Extremum ist. (Lokal ist es ein Minimum). Dabei werden die Endpunkte festgehalten.

Beweis: Wir variieren

$$q_j(t) \to q_j(t) + \delta q_j(t). \tag{15.2}$$

Unter dieser Variation (in erster Ordnung in $\delta q_j(t)$) folgt

$$\begin{aligned} I + \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \mathrm{d}t}_{I} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \mathrm{d}t}_{\delta I} \end{aligned} \tag{15.3}$$

Wir führen nun für den Term $\delta \dot{q}_j$-Term eine partielle Integration durch und erhalten

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \mathrm{d}t + \underbrace{\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0}. \tag{15.4}$$

Der letzte Term verschwindet, da an den Endpunkten q_j nicht variiert wird, $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Da δI für beliebige $\delta q_j(t)$ verschwinden muss, gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{15.5}$$

Dies sind aber gerade die Lagrange-Gleichungen 2. Art. Diese sind also zum Hamiltonschen Prinzip äquivalent.

Dem Hamiltonschen Prinzip entnimmt man: Addiert man zu $\mathcal{L}$ eine vollständige Zeitableitung $\mathrm{d}\Lambda(q,t)/\mathrm{d}t$, so ändern sich die Bewegungsgleichungen nicht, denn das Zeitintegral hierüber ist $\Lambda(q^{(2)}, t_2) - \Lambda(q^{(1)}, t_1)$. Dieser Ausdruck unterliegt aber nicht der Variation, da er nur die q der Endpunkte enthält.

15.b Beispiel zur Variationsrechnung

Wir betrachten als Beispiel zur Variationsrechnung die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Die Länge einer Kurve zwischen zwei Punkten ist gegeben durch

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{15.6}$$

Bei der Variation haben wir

$$y(x) \to y(x) + \delta y(x), \quad y'(x) \to y'(x) + \delta y'(x) \tag{15.7}$$

zu ersetzen und erhalten

$$l + \delta l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y'+\delta y')^2}\mathrm{d}x. \tag{15.8}$$

Wir nehmen nun alle Beiträge in erster Ordnung in den δ-Termen mit

$$\delta l = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{y'(x)\delta y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}}_{\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{1+y'^2}\delta y'} \tag{15.9}$$

Unter Verwendung von $\delta y' = \mathrm{d}(\delta y(x))/\mathrm{d}x$ und mittels partieller Integration erhalten wir

$$\delta l = \left.\frac{y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}_{0} \delta y(x)\mathrm{d}x \tag{15.10}$$

Da die Klammer verschwinden muss, muss $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ konstant sein. Daraus folgt dann, dass auch die Steigung y' konstant sein muss. Die Lösung ist also die Gerade.

Die Entsprechungen zwischen diesem geometrischen Problem und dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich aus

$$l \hat{=} I, \quad \sqrt{1+y'^2} \hat{=} \mathcal{L}, \quad y \hat{=} q, \quad x \hat{=} t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y'} - \frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y} = 0 \hat{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{15.11}$$

16 Invarianzen und Erhaltungsgrößen

16.a Zyklische Variable

Falls $\mathcal{L}$ von einem q_i nicht abhängt, sondern nur von $\dot{q}_i$, dann gilt $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$ und man bezeichnet die Variable q_i als zyklisch. Es folgt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = 0 \tag{16.1}$$

und damit ist dann der verallgemeinerte Impuls

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \tag{16.2}$$

eine Erhaltungsgröße.

16.b Noethersches Theorem

Falls unter einer infinitesimalen Transformation

$$\bar{q}_i = q_i + \delta q_i(q,t), \quad \bar{t} = t + \delta t(q,t) \tag{16.3}$$

$\mathcal{L}\mathrm{d}t$ bis auf ein totales Differential $\mathrm{d}\Lambda$ in sich übergeht, das heißt, falls

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \bar{t})\mathrm{d}\bar{t} = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\Lambda(q,t), \tag{16.4}$$

oder äquivalent

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \bar{t})\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{16.5}$$

erfüllt ist, dann ist

$$\sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i - \dot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta t\right) + \mathcal{L}\delta t - \Lambda \tag{16.6}$$

eine Erhaltungsgröße. Dies sieht man folgendermaßen: Mit

$$\dot{\bar{q}}_i = \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, \quad \dot{\bar{t}} = 1 + \delta\dot{t}, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{q}_i}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{\dot{q}_i + \delta\dot{q}_i}{1+\delta\dot{t}} = \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i - \dot{q}_i\delta\dot{t} \tag{16.7}$$

erhalten wir aus (16.5)

$$\sum_i \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i}_{\alpha} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}(\delta\dot{q}_i - \dot{q}_i\delta\dot{t})}_{\alpha \qquad \gamma} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \mathcal{L}\delta\dot{t}}_{\beta} = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} \tag{16.8}$$

Wir fassen nun die beiden mit α gekennzeichneten Terme zusammen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right) \tag{16.9}$$

Die beiden mit β gekennzeichneten Terme treten in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{L}\delta t) = \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i \delta t}_{\delta} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \delta t}_{\delta} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \mathcal{L}\delta\dot{t}}_{\beta} \qquad (16.10)$$

auf, der mit γ und die mit δ gekennzeichneten Terme treten schließlich in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta t\right) = \underbrace{\ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta t}_{\delta} + \underbrace{\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta t}_{\delta} + \underbrace{\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{t}}_{\gamma}. \qquad (16.11)$$

auf, wobei wir im zweiten δ-Term die Bewegungsgleichung verwendet haben. Bilden wir nun (16.8)-(16.9)+(16.10)-(16.11), so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta t\right) + \mathcal{L}\delta t - \Lambda\right) = 0. \qquad (16.12)$$

Die in der äußeren Klammer enthaltene Größe ist die in (16.6) angegebene Größe, deren Erhaltung wir damit nachgewiesen haben.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir nochmals die zyklische Variable. Sie ist im Noetherschen Theorem enthalten, wenn wir $\delta q_j = \delta_{ij}$, $\delta t = 0$ setzen. dann reduziert sich die Erhaltungsgröße (16.6) auf $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$.

16.c Energie-Erhaltung

Es sei $\mathcal{L}$ unabhängig von t, das heißt $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$. Wir wählen nun $\delta q = 0$, δt =const. Dann ist (16.5) mit $\Lambda = 0$ erfüllt und damit ist

$$\mathcal{L} - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (16.13)$$

erhalten. Für skleronome Systeme ist

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \qquad (16.14)$$

die Energie. Wir betrachten nun, was wir im Fall von Ladungen im Magnetfeld erhalten. Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} + \mathcal{L}_{\mathrm{mag}}$. Mit

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad (16.15)$$

folgt

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \underbrace{\sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}}_{\mathcal{T}_{jk}(q)} = \frac{1}{2}\sum_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\mathcal{T}_{jk}(q), \qquad (16.16)$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{c}\sum_i e_i \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \sum_j \dot{q}_j \underbrace{\sum_i \frac{e_i}{c}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\mathbf{A}(\mathbf{x}_i(q))}_{b_j(q)} = \sum_j \dot{q}_j b_j(q). \qquad (16.17)$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\sum_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \mathcal{T}_{jk}(q) + \sum_j \dot{q}_j b_j(q) - \mathcal{V}(q), && (16.18)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_k \dot{q}_k \mathcal{T}_{ik}(q) + b_i(q). && (16.19)
\end{aligned}
$$

und die Energie

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\\
&= \sum_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \mathcal{T}_{ik}(q) + \sum_i \dot{q}_i b_i(q) - \frac{1}{2}\sum_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \mathcal{T}_{jk}(q) - \sum_j \dot{q}_j b_j(q) + \mathcal{V}(q)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \mathcal{T}_{jk}(q) + \mathcal{V}(q) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) + \mathcal{V}(q). && (16.20)
\end{aligned}
$$

Der magnetische Anteil hebt sich heraus. Dies liegt daran, dass die Lorentz-Kraft keine Arbeit leistet.

16.d Impuls-Erhaltung

Falls die Homogenität des Raumes gilt, erhalten wir mit $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{a}$, $\delta t = 0$

$$
\mathcal{L}(\mathbf{x}_i + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}_i, t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, t). \tag{16.21}
$$

Dann ist

$$
\sum_i \mathbf{a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = \sum_i \mathbf{a}\,\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}_i} \mathcal{L} = \sum_i \mathbf{a}\mathbf{p}_i \tag{16.22}
$$

erhalten. Das heißt $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathrm{const.}$

Aufgabe Für ein zeitunabhängiges und translationsinvariantes System mit $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ setze man $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{u}t$, $\delta t = 0$ mit konstantem $\mathbf{u}$. Wie muss man Λ wählen, damit (16.5) erfüllt ist? Welcher Erhaltungssatz ergibt sich hieraus?

C Das Zweikörperproblem

17 Relativ- und Schwerpunkts-Koordinaten

Wir betrachten zwei Massen m_1 und m_2, die über ein Zentralpotential wechselwirken.

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{x}}_2^2 - \mathcal{V}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \tag{17.1}$$

Da der Impuls erhalten ist, erhalten wir für die Schwerpunktsbewegung (vgl. 4.8)

$$m_1\dot{\mathbf{x}}_1 + m_2\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P} = \text{const}, \tag{17.2}$$

$$M\mathbf{R} = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{P}t + M\mathbf{R}_0 \tag{17.3}$$

mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$. Wir führen den Abstandsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ein,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\mathbf{x}. \tag{17.4}$$

Wir formen die kinetische Energie um

$$\begin{aligned}
\frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{x}}_2^2 &= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\frac{-m_1 m_2}{M} + \frac{m_1 m_2}{M}\right)\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{R}} \\
&+ \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{2M^2}\dot{\mathbf{x}}^2 \\
&= \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2
\end{aligned} \tag{17.5}$$

mit der reduzierten Masse $m = m_1 m_2/M$ und erhalten die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - \mathcal{V}(|\mathbf{x}|). \tag{17.6}$$

Damit zerfällt die Bewegung in zwei unabhängige Einzelbewegungen:
a) die Schwerpunktsbewegung mit der zyklischen Variablen $\mathbf{R}$.
b) die Relativbewegung $\mathbf{x}$.
Die Relativbewegung ist die eines Teilchens der reduzierten Masse m im Zentralpotential $\mathcal{V}$.

18 Bewegung im Zentralpotential

18.a Bewegungsgleichungen

Auf das Teilchen wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,\mathcal{V}(x) = -\frac{\mathbf{x}}{x}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{18.1}$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt, ist das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Daher ist der Drehimpuls $\mathbf{L}$ konstant. Es gibt zwei Fälle:
a) $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. dann ist $\dot{\mathbf{x}} \parallel \mathbf{x}$ zu allen Zeiten, die Bewegung erfolgt auf einer Geraden, eindimensionales Problem.
b) $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$. Dann stehen $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ senkrecht auf $\mathbf{L}$. Die Masse bewegt sich in der zu $\mathbf{L}$ senkrechten Ebene, die durch den Ursprung geht: Ebenes Problem. Wir legen die z-Richtung in Richtung von $\mathbf{L}$ und führen Polarkoordinaten $\mathbf{x} = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$ ein. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \mathcal{V}(r), \tag{18.2}$$

(vgl. 12.24). Wir haben zwei generalisierte Koordinaten, r und ϕ. Die Bewegungsgleichung für ϕ lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \tag{18.3}$$

das heißt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\phi}) = 0. \tag{18.4}$$

Damit ist $mr^2\dot{\phi} = l$ eine Konstante der Bewegung. ϕ ist eine zyklische Variable. Tatsächlich handelt es sich hierbei um den Drehimpuls

$$\begin{aligned} L_z &= xp_y - yp_x \\ &= r\cos\phi\, m(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) - r\sin\phi\, m(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi) \\ &= mr^2\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Die Bewegungsgleichung für r lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}, \tag{18.6}$$

also

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial r}. \tag{18.7}$$

Setzen wir $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$ ein, so folgt

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}(r)\right). \tag{18.8}$$

Die Radialbewegung ist äquivalent zu einer eindimensionalen Bewegung im effektiven Potential

$$\mathcal{V}_{\rm eff}(r) = \mathcal{V}(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \tag{18.9}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist das Zentrifugalpotential. Dieser Beitrag

$$\frac{l^2}{2mr^2} = \frac{(mr^2\dot\phi)^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}(r\dot\phi)^2 \tag{18.10}$$

ist der Beitrag der kinetischen Energie, der von $\dot\phi$ herrührt. Es gilt also

$$E_{\rm eff} = \frac{m}{2}\dot r^2 + \mathcal{V}_{\rm eff} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = E. \tag{18.11}$$

18.b Integration der Bewegungsgleichungen

a) Radialbewegung: Aus

$$\frac{m}{2}\left(\frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\right)^2 = E - \mathcal{V}_{\rm eff}(r) \tag{18.12}$$

folgt

$$\dot r = \frac{{\rm d}r}{{\rm d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}} \tag{18.13}$$

und daraus

$$t = \pm\int \frac{{\rm d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}}}. \tag{18.14}$$

b) Bahnkurve: Aus

$$l = mr^2\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}t} = mr^2\frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}r} = \pm mr^2\sqrt{\ldots}\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}r} \tag{18.15}$$

folgt

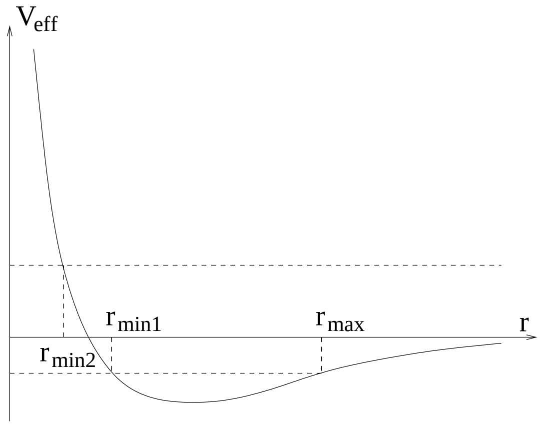
$${\rm d}\phi = \pm\frac{l{\rm d}r}{mr^2\sqrt{\ldots}} \tag{18.16}$$

und

$$\phi = \pm\int \frac{\frac{l}{mr^2}{\rm d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}}}. \tag{18.17}$$

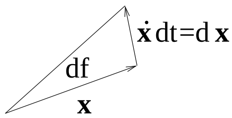
Falls die Masse eine geschlossene Bahn durchläuft, ergibt sich die Periode (Zeit vom Punkt größter Entfernung zum nächsten Punkt größter Entfernung) zu

$$T = 2\int_{r_{\rm min1}}^{r_{\rm max}} \frac{{\rm d}r}{\dot r} \tag{18.18}$$



und der Winkel χ, der von $r_{\min}$ bis $r_{\max}$ überstrichen wird, zu

$$\chi = \Delta\phi = \int_{r_{\min 1}}^{r_{\max}} \frac{l \mathrm{d}r}{mr^2 \dot{r}}. \tag{18.19}$$



Wir betrachten noch die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche. Diese ergibt sich zu

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}|\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}| = \frac{1}{2}|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}|\mathrm{d}t = \frac{l}{2m}\mathrm{d}t \tag{18.20}$$

unter Verwendung des Drehimpulses $l = m|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}|$. Daraus folgt das zweite Keplersche Gesetz: In gleichen Zeiten werden vom Fahrstrahl gleiche Flächen überstrichen.

$$f = \frac{l}{2m}t, \quad t = \frac{2m}{l}f. \tag{18.21}$$

19 Kepler-Problem

Zwei Massen m_1 und m_2 ziehen sich mit dem Gravitationspotential

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} \tag{19.1}$$

an. Zwischen zwei Ladungen e_1 und e_2 besteht das Coulomb-Potential (im Gaussschen Maßsystem)

$$\mathcal{V}(r) = \frac{e_1 e_2}{r}. \tag{19.2}$$

Allgemein können wir schreiben

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \mathcal{V}_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}. \tag{19.3}$$

Wir führen nun die Umkehrpunkte $r_\pm$ mit $\mathcal{V}_{\text{eff}}(r_\pm) = E$ ein,

$$\frac{1}{r_\pm^2} - \frac{2m\alpha}{l^2}\frac{1}{r_\pm} = \frac{2mE}{l^2}. \tag{19.4}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{m\alpha}{l^2} \mp \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2mE}{l^2}} \tag{19.5}$$

und

$$\phi = \pm \int \frac{l \mathrm{d}r}{mr^2\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{l^2}{m^2r^2}}} = \mp \int \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+})}}. \tag{19.6}$$

Es gibt zwei Arten von Bahnen:
a) Geschlossene Bahnen erhält man für $\alpha > 0$, $0 > E \geq -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$; dann sind r_+ und r_- positiv.
b) Offene Bahnen für $E \geq 0$. Dann ist r_- positiv und $1/r_+ \leq 0$.
In beiden Fällen erhalten wir

$$\phi = \arccos\left(\frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}}{\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}}\right) + \phi_0. \tag{19.7}$$

Aufgelöst nach $1/r$ ergibt dies

$$\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)}_{1/p} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right)}_{\epsilon/p}\cos(\phi - \phi_0) = \frac{1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)}{p}. \tag{19.8}$$

Dabei bezeichnet man p als Parameter und ϵ als (relative) Exzentrizität. Diese Bahnkurven sind Kegelschnitte. Drehen wir x- und y-Achse, so dass $\phi_0 = 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} p = r + r\epsilon\cos\phi = r + \epsilon x, \\ r = p - \epsilon x, \\ r^2 = x^2 + y^2 = p^2 - 2p\epsilon x + \epsilon^2 x^2, \\ (1-\epsilon^2)x^2 + y^2 + 2p\epsilon x = p^2. \end{aligned} \tag{19.9}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse für $\epsilon^2 < 1$, einer Parabel für $\epsilon^2 = 1$ und einer Hyperbel für $\epsilon^2 > 1$.

Die Umlaufdauer T für die Ellipsenbahn können wir aus dem Flächensatz berechnen,

$$T = \frac{2m}{l}F. \tag{19.10}$$

Aus der Ellipsengleichung

$$(1-\epsilon^2)(x + \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2})^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\epsilon^2} \tag{19.11}$$

erhalten wir die Halbachsen

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \quad a = \frac{p}{1-\epsilon^2} \tag{19.12}$$

und damit die Fläche der Ellipse

$$F = \pi ab = \frac{\pi p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}. \tag{19.13}$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) = \frac{m\alpha}{l^2}, \tag{19.14}$$

woraus $l = \sqrt{m\alpha p}$ folgt, so erhalten wir

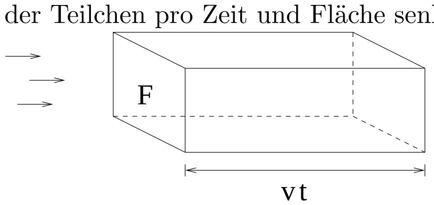
$$T = \frac{2m}{\sqrt{m\alpha p}}\frac{\pi p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(\frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \tag{19.15}$$

und damit das dritte Keplersche Gesetz, das besagt, dass sich die Quadrate T^2 der Umlaufzeiten wie die Kuben a^3 der großen Halbachsen verhalten.

20 Streuung am Zentralpotential

20.a Differentieller Wirkungsquerschnitt

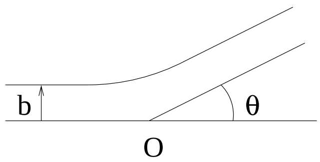
Wir betrachten einen einfallenden Strahl (vorgebener Geschwindigkeit $\mathbf{v}$) der Intensität (Teilchenstromdichte) j, die gegeben ist durch die einfallende Anzahl der Teilchen pro Zeit und Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit.

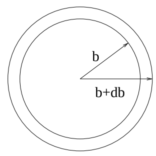


Die Zahl der Teilchen im oben gezeigten Volumen ist

$$jFt = \underbrace{n}_{\text{Teilchenzahldichte}} \cdot \underbrace{Fvt}_{\text{Volumen}} \tag{20.1}$$

Damit erhalten wir für die Teilchenstromdichte $j = nv$.





Die Teilchen fallen alle parallel zueinander ein. Den Abstand von der parallelen Achse durch das Streuzentrum bezeichnet man als Stoßparameter b. Den Streuwinkel, um den das Teilchen abgelenkt wird, sei θ. Wir bezeichnen den Streuquerschnitt mit σ. Dann ist die Fläche des Kreisrings der Breite db

$$\mathrm{d}\sigma = \underbrace{2\pi b}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}b}_{\text{Breite des Kreisrings}} . \tag{20.2}$$

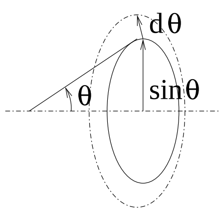
Pro Zeiteinheit gehen durch den Kreisring

$$j\mathrm{d}\sigma = 2\pi j b \mathrm{d}b \tag{20.3}$$

Teilchen.

Diese werden in den Raumwinkel

$$\mathrm{d}\Omega = \underbrace{2\pi \sin\theta}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\theta}_{\text{Breite}} \tag{20.4}$$



gestreut. Den Raumwinkel, unter dem z.B. ein Gegenstand erscheint, erhält man, indem man von dem Punkt P, von dem man diesen misst, Strahlen zu dem Gegenstand zeichnet und dann eine Einheitskugel mit Mittelpunkt P mit den Strahlen schneidet. Das dadurch erzeugte Flächengebiet ist der Raumwinkel. Für einen Vollwinkel erhält man 4π, für die Ecke eines Würfels ein Achtel davon, also $\pi/2$.

Die Anzahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ gestreuten Teilchen beträgt

$$j\mathrm{d}\sigma = j\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = j2\pi b\mathrm{d}b. \tag{20.5}$$

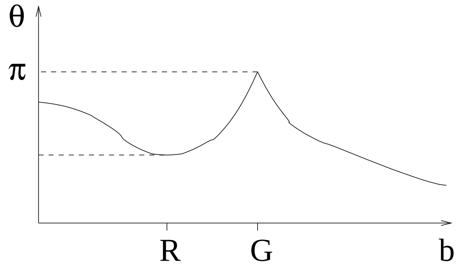
Die Anzahl der gestreuten Teilchen ist proportional zu j, t und $\mathrm{d}\Omega$,

$$\mathrm{d}n = jt\mathrm{d}\sigma = jt\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega. \tag{20.6}$$

Man bezeichnet $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ als differentiellen Streu- oder Wirkungsquerschnitt. Aus den Gleichungen (20.2) und (20.4) erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|\frac{2\pi b\mathrm{d}b}{2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|. \tag{20.7}$$

θ ist eine eindeutige Funktion von b, hingegen kann es mehrere Lösungen b für gegebenen Streuwinkel θ geben. In diesem Fall muss man die Beiträge aller zugehörigen b aufsummieren. Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann unendlich werden. Dies geschieht bei $\sin\theta = 0$, also in Vorwärts- und Rückwärts-Richtung ('glory' G), aber auch wenn $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}b = 0$ wird, 'Regenbogen-Streuung' (R).



Der totale Streuquerschnitt ergibt sich zu

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = 2\pi\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{20.8}$$

Er ist im klassischen Fall durch π mal Quadrat der Reichweite des Potentials gegeben, bei einem Potential unendlicher Reichweite also unendlich. Es sei nur erwähnt, dass man quantenmechanisch für hinreichend rasch abfallende Potentiale, aber unendlicher Reichweite endliche totale Streuquerschnitte erhält.

20.b Rutherford-Streuung

Wir betrachten nun die Rutherford-Streuung, d.h. die Streuung zweier Punktladungen aneinander ($E > 0$). Wir hatten

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)). \tag{20.9}$$

Die Extreme $1/r_\pm$ erhält man für $\cos(\phi-\phi_0)=\mp 1$, also

$$\frac{1\mp\epsilon}{p}=\frac{1}{r_\pm}=\frac{m\alpha}{l^2}\mp\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{l^4}+\frac{2mE}{l^2}}, \tag{20.10}$$

woraus

$$\epsilon=\mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{1+\frac{2l^2E}{m\alpha^2}} \tag{20.11}$$

folgt. Für positives α (Anziehung) hat man $\epsilon>1$, $p>0$, $\cos(\phi-\phi_0)>-1/\epsilon$, $|\phi-\phi_0|<\chi>\pi/2$, für negatives α (Abstoßung) $\epsilon<-1$, $p<0$, $\cos(\phi-\phi_0)>-1/\epsilon$, $|\phi-\phi_0|<\chi<\pi/2$. Für die Asymptoten gilt

$$\phi-\phi_0=\pm\chi,\quad \chi=\arccos(-\frac{1}{\epsilon}). \tag{20.12}$$

Der Streuwinkel ergibt sich in beiden Fällen zu $\theta=|2\chi-\pi|$, also

$$\cos\theta=\cos(2\chi-\pi)=-\cos(2\chi)=-2\cos^2\chi+1=-\frac{2}{\epsilon^2}+1. \tag{20.13}$$

Mit $l=bmv$, $l^2=b^2m^2v^2=b^2\cdot 2mE$ formen wir um

$$\cos\theta=1-\frac{2}{\frac{2l^2E}{m\alpha^2}+1}=1-\frac{2}{\frac{4E^2b^2}{\alpha^2}+1} \tag{20.14}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left|\frac{db^2}{2d\cos\theta}\right|=\left|\frac{2d\cos\theta}{db^2}\right|^{-1}\\ &= \left(\frac{4}{\left(\frac{4E^2b^2}{\alpha^2}+1\right)^2}\frac{4E^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{4E^2}{\alpha^2}(1-\cos\theta)^2\right)^{-1},\end{aligned} \tag{20.15}$$

was mit $1-\cos\theta=2(\sin^2\frac{\theta}{2})^2$ auf das Endergebnis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{16E^2(\sin\frac{\theta}{2})^4} \tag{20.16}$$

für die Rutherford-Streuung führt.