Klassische Elektrodynamik

Theoretische Physik II   Vorlesungs-Skriptum

Deutsche Fassung

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen.
Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank und Bastian Engeser bin ich dankbar, dass sie mich auf mehrere Druckfehler in der ersten deutschen Auflage aufmerksam gemacht haben. In gleicher Weise danke ich Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Freese und Markus Gabrysch, dass sie mich auf Druckfehler der zweiten Auflage hingewiesen haben.
Cornelia Merkel, Melanie Steiert und Sonja Bartsch danke ich für das sorgfältige Lesen und Korrigieren des Textes der zweisprachigen Ausgabe.

Bücher:

Becker, Sauter: Theorie der Elektrizität I
Jackson, Classical Electrodynamics
Landau, Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie
Panofsky, Phillips, Classical Electricity and Magnetism
Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik III: Elektrodynamik
Stratton, Electromagnetic Theory
Stumpf, Schuler: Elektrodynamik

A Grundgleichungen

Vorbemerkungen
Ich gehe davon aus, dass der Student bereits etwas mit der Elektrodynamik aus einer einführenden Vorlesung vertraut ist. Daher setze ich die vollständigen Gleichungen an den Anfang und führe von diesen ausgehend die jeweiligen Spezialisierungen ein.
In dieser Ausarbeitung verwende ich das Gaußsche Maßsystem und nicht das SI-System. Der Zusammenhang und die Motivation wird im nächsten Abschnitt und in Anhang A angegeben.
Im Anhang B sind Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis angegeben. Der Leser /Die Leserin sei jedoch gewarnt, dass er/sie an einigen Stellen (B.11, B.15, B.34-B.50 und Aufgabe nach B.71) die Ergebnisse selbst einzutragen hat. Er/Sie ist also aufgefordert, die Rechnungen selbst durchzuführen oder zumindest die Ergebnisse, die in dem Skriptum erarbeitet werden, dort einzutragen.

1 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik befasst sich mit elektrischen und magnetischen Feldern, ihrer Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihrer Ausbreitung (elektromagnetische Wellen), ihrer Rückwirkung auf die Materie (Kräfte).

1.a Ladungen und Ströme

1.a.α Ladungsdichte

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Ladung Δq pro Volumenelement ΔV

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \tag{1.1}$$

Damit ergibt sich die Ladung q im Volumen V zu

$$q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}). \tag{1.2}$$

Besteht die Ladungsverteilung aus Punktladungen q_i an den Orten $\mathbf{r}_i$, so ist die Ladungsdichte durch die Summe

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

gegeben, wobei die Diracsche Delta-Funktion (eigentlich Delta-Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \left\{ \begin{array}{cl} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{falls } \mathbf{r}_0 \notin V \end{array} \right. \tag{1.4}$$

hat.
Ähnlich definiert man die Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an Grenz- oder Oberflächen als Ladung pro Fläche

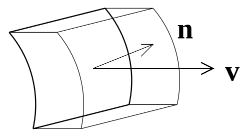
$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{dq}{df}, \tag{1.5}$$

ähnlich auch die Linienladungsdichte.

1.a.β Strom und Stromdichte

Der Strom I ist die Ladung dq, die pro Zeiteinheit dt durch eine Fläche F fließt,

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{1.6}$$



Es sei nun $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\mathbf{n}$ die (auf die Länge 1 normierte) Flächennormale. Dann ist $\mathbf{v}dt$ der Weg, den die Ladungen in der Zeit dt zurücklegen. Multipliziert mit $\mathbf{n}$ ergibt sich die Schichtdicke $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dt$, die die in der Zeit dt durch die Fläche geflossenen Ladungen bilden.Multipliziert mit dem Flächenelement df ergibt sich das Volumen der Ladung, die durch df geflossen ist. Weitere Multiplikation mit der Ladungsdichte ρ ergibt die Ladung dq, die in der Zeit dt durch die Fläche df tritt

$$\begin{aligned} dq &= \int_F \mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n} df \rho && (1.7)\\ I = dq/dt &= \int_F \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})df = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{f} && (1.8) \end{aligned}$$

mit der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ und dem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$.

1.a.γ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

Die Ladung q in einem festen Volumen V

$$q(t) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r},t) \tag{1.9}$$

ändert sich pro Zeiteinheit um

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Da die Ladung erhalten ist, kann sie sich nur durch einen Strom durch die Oberfläche ∂V des Volumens ändern. Wir bezeichnen mit I den nach außen fließenden Strom. Dann ist

$$\frac{dq(t)}{dt} = -I(t) = -\int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)d\mathbf{f} = -\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \tag{1.11}$$

wobei wir vom Gaußschen Satz (B.59) Gebrauch machten. Da die Beziehungen (1.10) und (1.11) für jedes Volumen und auch jedes Volumenelement gilt, folgt die Gleichheit der Integranden in den beiden Volumenintegralen

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{1.12}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt in differentieller Form die Erhaltung der Ladung aus.

1.b Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Diese Beziehung wird durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (1.13)\\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) && (1.14)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} &= \mathbf{0} && (1.15)\\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0. && (1.16) \end{aligned}$$

Diese Maxwell-Gleichungen werden bisweilen als Maxwell-Gleichungen im Vakuum bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie. Die Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten alle Beiträge, also freibewegliche und Polarisations-Ladungsdichten und freibewegliche, Polarisations- und Magnetisierungs-stromdichten.
Vielfach verlangt man als Randbedingung noch, dass das elektrische und das magnetische Feld im Unendlichen verschwinden.

1.c Coulomb- und Lorentz-Kraft

Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ üben auf eine Ladung q am Ort $\mathbf{r}$, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, die Kraft

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.17}$$

aus.
Dabei sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Beiträge, die nicht von q selbst herrühren. Die von q selbst erzeugten Felder bewirken die Reaktionskraft, die wir jedoch im Weiteren nicht betrachten.
Der erste Beitrag in (1.17) ist die Coulomb-Kraft, der zweite die Lorentz-Kraft. Dabei ist c= 299 792 458 m/s. Wir werden später sehen, dass diese Konstante die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. (Man hat sie zu obigem Wert definiert und damit den Umrechnungsfaktor zwischen Zeit und Länge festgelegt.) Die Kraft, die auf ein kleines Volumen ΔV wirkt, lässt sich schreiben als

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V \tag{1.18}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

Man bezeichnet $\mathbf{k}$ als die Kraftdichte. Die auf das Volumen V wirkende elektromagnetische Kraft ergibt sich dann zu

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\mathbf{k}(\mathbf{r}). \tag{1.20}$$

2 Dimensionen und Einheiten

2.a Gaußsches Maßsystem

In dieser Vorlesung verwenden wir das Gaußsche Maßsystem. Wir betrachten nun die Dimensionen der auftretenden Größen. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12) und den Maxwellgleichungen (1.13) bis (1.16) folgt

$$
\begin{aligned}
[\rho]/[t] &= [j]/[x] &(2.1)\\
[B]/[x] &= [E]/([\mathrm{c}][t]) = [j]/[\mathrm{c}] &(2.2)\\
[E]/[x] &= [B]/([\mathrm{c}][t]) = [\rho]. &(2.3)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
[j] &= [\rho][x]/[t] &(2.4)\\
[E] &= [\rho][x] &(2.5)\\
[B] &= [\rho][\mathrm{c}][t] = [\rho][x]^2/([\mathrm{c}][t]), &(2.6)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{c}] &= [x]/[t] &(2.7)\\
[B] &= [\rho][x]. &(2.8)
\end{aligned}
$$

Daraus sieht man, dass c tatsächlich die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Um die weiteren Größen in ihrer Dimension festzulegen, müssen wir noch den Ausdruck (1.19) für die Kraftdichte k verwenden

$$[k] = [\rho][E] = [\rho]^2[x]. \tag{2.9}$$

Daraus folgt dann

$$
\begin{aligned}
[\rho]^2 &= [k]/[x] = \mathrm{dyn\ cm}^{-4} &(2.10)\\
[\rho] &= \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2} &(2.11)\\
[E] = [B] &= \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} &(2.12)\\
[j] &= \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1} &(2.13)\\
[q] &= [\rho][x]^3 = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} &(2.14)\\
[I] &= [j][x]^2 = \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}^{-1}. &(2.15)
\end{aligned}
$$

2.b Andere Einheitensysteme

Für jede Größe kann die Einheit in jedem System unabhängig definiert werden. Glücklicherweise macht man davon nicht vollständigen Gebrauch.

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem in vielen Ländern (z.B. in USA seit 1894, in Deutschland seit 1898) und wird in der Technik angewandt. Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \mathrm{kg\ m}^2\ \mathrm{s}^{-2} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{2.16}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{2.17}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauß	1	1	c	1
Elektrostatisch (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(c^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die bisher eingeführten Größen drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 3 \cdot 10^4 \mathrm{V/m} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \hat{=} 10^{-4} \mathrm{Vs/m}^2 \tag{2.19}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}q^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \hat{=} 10^{-9}/3\mathrm{As}, \text{ ähnlich } \rho, \sigma, I, j. \tag{2.20}$$

Ein Umrechnungsbeispiel: Die Coulomb-Lorentz-Kraft lässt sich schreiben

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{q^*}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}(\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* + \frac{\sqrt{\psi}}{c\sqrt{\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{c\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v} \times \mathbf{B}^*). \tag{2.21}$$

Die Elementarladung e_0 ist in dem von uns verwendeten Gaußschen Maßsystem $4.803 \cdot 10^{-10}$ $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm und im SI-System $1.602 \cdot 10^{-19}$ As. Das Elektron trägt die Ladung -e_0, das Proton e_0, ein Kern der Kernladungszahl Z die Ladung Ze_0, Quarks die Ladungen $\pm e_0/3$ oder $\pm\ 2e_0/3$.
Weitere Angaben werden jeweils bei der Einführung weiterer Größen gegeben und sind im Anhang A zusammengefasst.

2.c Motivation für Gaußsche Einheiten

Im SI-System sind das elektrische Feld **E** und die dielektrische Verschiebung **D** wie auch die magnetische Induktion **B** und das Magnetfeld **H** mit unterschiedlichen Dimensionen behaftet. Hierdurch wird leicht der irreführende Eindruck erweckt, es handele sich um unabhängige Felder. Auf einem mikroskopischen Niveau hat man es nur mit zwei Feldern, **E** und **B** zu tun, (1.13-1.16).
Tatsächlich wird der zweite Satz Felder nur dadurch eingeführt, dass man Polarisations- und Magnetisierungsanteile der Ladungen und Ströme in Materie aus den totalen Ladungen und Strömen herauszieht und zu den Feldern addiert (Abschnitt 6 und 11).
Dieser enge Zusammenhang kommt besser in einem cgs-System zum Ausdruck, in dem **E** und **D** gleiche Dimension haben wie auch **B** und **H**.
Leider gehört das Gaußsche Maßsystem zu den irrationalen, während das SI-System ein rationales ist, so dass bei Umrechnungen auch immer Faktoren 4π auftreten. Ich hätte ein rationales Maß-System wie das von Heaviside und Lorentz vorgezogen. Leider wird aber in gängigen Lehrbüchern nur das SI-System und das Gaußsche verwendet. Ich möchte die Studierenden nicht mit einem Maßsystem konfrontieren, mit dem praktisch kein Lehrbuch arbeitet.

B Elektrostatik

3 Elektrisches Feld, Potential, Energie des Feldes

3.a Statik

In der Statik behandelt man das zeitunabhängige Problem. Das heißt, die auftretenden Größen hängen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dann zerfallen die Kontinuitätsgleichung (1.12) und die Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16) in zwei Gruppen

$$\begin{array}{cc} \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 & \\ \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) & \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 & \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \text{Magnetostatik} & \text{Elektrostatik} \\ \mathbf{k}_{\rm ma} = \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) & \mathbf{k}_{\rm el} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{array} \tag{3.1}$$

Die erste Gruppe von Gleichungen enthält nur die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und die Stromdichte $\mathbf{j}$. Sie beschreibt die Magnetostatik. Die zweite Gruppe von Gleichungen enthält nur das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Ladungsdichte ρ. Sie ist Grundlage der Elektrostatik. In der letzten Zeile sind noch die entsprechenden Anteile der Kraftdichte $\mathbf{k}$ hinzugefügt.

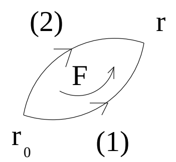
3.b Elektrisches Feld und Potential

3.b.α Elektrisches Potential

Wir führen nun das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ ein. Hierzu betrachten wir das Wegintegral von $\mathbf{E}$ auf zwei verschiedenen Wegen (1) und (2) von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}$

$$\int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(1)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\substack{\mathbf{r}_0\\(2)}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

wobei das letztere Integral über den geschlossenen Weg von $\mathbf{r}_0$ auf (1) nach $\mathbf{r}$ und von dort in entgegengesetzter Richtung auf (2) nach $\mathbf{r}_0$ zu erstrecken ist.Das letztere Integral lässt sich mit dem Stokesschen Satz (B.56) in das Integral über die von (1) und (2) berandete Fläche $\int d\mathbf{f}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überführen, das wegen der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (3.1) verschwindet.



Daher ist das Integral (3.2) vom Weg unabhängig und man definiert das elektrische Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}_0). \tag{3.3}$$

Dabei sind $\mathbf{r}_0$ und $\Phi(\mathbf{r}_0)$ willkürlich, aber fest. $\Phi(\mathbf{r})$ ist daher bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Wir haben auf Grund der Definition (3.3)

$$d\Phi(\mathbf{r}) = -d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

3.b.β Elektrischer Fluss und Ladung

Aus $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, (3.1) folgt

$$\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V d^3r\rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

und damit mit dem Gaußschen Satz (B.59)

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q(V), \tag{3.6}$$

das heißt der elektrische Fluß des Feldes $\mathbf{E}$ durch die Oberfläche ist das 4π-fache der Ladung q im Volumen V.
Eine einfache Anwendung hat dies für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}/r$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' d\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r')r'^2 dr', \tag{3.7}$$

so dass man für das Feld

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \tag{3.8}$$

erhält.
Als Spezialfall betrachten wir jetzt noch eine Punktladung q im Ursprung. Dann gilt

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}q. \tag{3.9}$$

Das Potential hängt aus Symmetriegründen nur von r ab. Dann gilt

$$\operatorname{grad}\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3.10}$$

woraus durch Integration

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.} \tag{3.11}$$

folgt.

3.b.γ Potential einer Ladungsverteilung

Wir gehen aus von Punktladungen q_i an Orten $\mathbf{r}_i$. Das zugehörige Potential und die Feldstärke erhält man aus (3.11) und (3.10) durch Verschieben von $\mathbf{r}$ um $\mathbf{r}_i$ zu

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}. \tag{3.13}$$

Wir gehen nun von den Punktladungen zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ über. Wir führen dabei den Übergang $\sum_i q_i f(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V \rho(\mathbf{r}_i) f(\mathbf{r}_i)$ nach $\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')$ durch, was

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3.14}$$

ergibt. Aus $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ und $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ folgt die Poisson-Gleichung

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Man unterscheide $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ und Δ =Delta. Wir machen auf (3.15) die Probe. Zunächst bilden wir

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3} = \int d^3a\,\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})\frac{\mathbf{a}}{a^3} \tag{3.16}$$

und

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3a(\nabla\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a}))\cdot\frac{\mathbf{a}}{a^3} = \int_0^\infty da\int d\Omega_a\frac{\partial\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{\partial a} = \int d\Omega_a(\rho(\mathbf{r}+\infty\mathbf{e}_a)-\rho(\mathbf{r})) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{3.17}$$

wenn ρ im Unendlichen verschwindet. Dabei haben wir das dreidimensionale Integral über a zerlegt in das Integral über den Radius a und den Raumwinkel Ω_a, $d^3a = a^2dad\Omega_a$ (vergleiche Abschnitt 5). Aus der Poisson-Gleichung folgt

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\rho(\mathbf{r}) = -4\pi\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.18}$$

und aus der Gleichheit der Integranden

$$\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{3.19}$$

3.c Coulombkraft und Feldenergie

Auf die Ladung q_i am Ort $\mathbf{r}_i$ wirkt die Kraft

$$\mathbf{K}_i = q_i\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.20}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_i$ das elektrische Feld ohne das von der Ladung q_i selbst erzeugte. Damit folgt

$$\mathbf{K}_i = q_i\sum_{j\neq i}\frac{q_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3}. \tag{3.21}$$

Aus dieser Formel erkennt man auch die Definition der Ladungseinheit im Gaußschen Maßsystem: 1 $\text{dyn}^{1/2}$ cm ist die Ladung, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft 1 dyn ausübt. Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\Phi_i(\mathbf{r}_i). \tag{3.22}$$

Der Faktor 1/2 rührt daher, dass jedes Paar von Ladungen in der Summe zweimal auftritt. So ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Ladung 1 und Ladung 2 sowohl in $i = 1, j = 2$ wie auch in $i = 2, j = 1$ enthalten. Daher ist durch 2 zu dividieren. Dabei ist in Φ_i ebenfalls der von q_i herrührende Beitrag zum Potential nicht enthalten. Die Kraft folgt daraus wie üblich zu

$$\mathbf{K}_i = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i}U. \tag{3.23}$$

Im Kontinuum erhält man unter Verwendung von (B.62)

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\int_F d\mathbf{f}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi}\int d^3r\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}), \tag{3.24}$$

wobei jetzt der Beitrag der Ladungsdichte zu Φ am gleichen Ort nicht mehr auszunehmen ist, da er für eine kontinuierliche Verteilung vernachlässigbar ist. F schließe alle Ladungen ein und sei etwa eine Kugel vom Radius R. Im Limes $R \to \infty$ geht $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_F \propto 1/R \to 0$. Man erhält dann die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3rE^2(\mathbf{r}) = \int d^3r\,u(\mathbf{r}) \tag{3.25}$$

mit der Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\mathbf{r}). \tag{3.26}$$

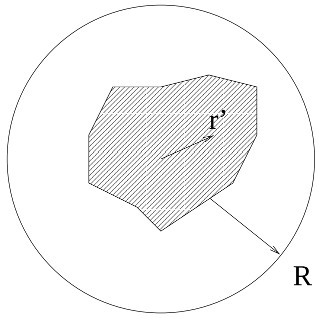
Klassischer Elektronenradius Als Beispiel betrachten wir den "klassischen Elektronenradius" R_0: Man nimmt an, die Ladung sei auf einer Kugelschale vom Radius R_0 gleichmäßig verteilt. Die elektrische Feldenergie stimme mit der Energie $\mathrm{m_0 c^2}$ überein, wobei $\mathrm{m_0}$ die Elektronenmasse ist.

$$\frac{1}{8\pi} \int_{R_0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e_0}}{r^2}\right)^2 r^2 dr d\Omega = \frac{\mathrm{e_0^2}}{2R_0} = \mathrm{m_0 c^2} \tag{3.27}$$

ergibt $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung in der Kugel ergibt ein etwas anderes Ergebnis.
Aus hochenergetischen Streuprozessen weiß man allerdings, dass die Ausdehnung des Elektrons um mindestens einen Faktor 100 kleiner sein muss, obige Annahme also unzutreffend ist.

4 Elektrischer Dipol und Quadrupol

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung. Außerhalb sei $\rho(\mathbf{r}') = 0$.



4.a Das Feld für $r > R$

Das Potential der Ladungsverteilung ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{4.1}$$

Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung nach $\mathbf{r}'$, das heißt nach den drei Variabeln x_1', x_2' und x_3' durch

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}'\nabla)^l}{l!} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\nabla)(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} - ... \tag{4.2}$$

Als erstes müssen wir den Gradienten von $1/r$ berechnen

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ da } \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} f'(r), \tag{4.3}$$

löse (B.39, B.42). Daraus folgt dann

$$(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Als nächstes berechnen wir (B.47)

$$\nabla\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{c}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \tag{4.5}$$

unter Verwendung von (B.27) und Lösung von (B.37, B.39). Damit erhalten wir die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + ... \tag{4.6}$$

Wir formen zunächst noch $3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2$ um

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = x_\alpha' x_\beta'(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}) = (x_\alpha' x_\beta' - \frac{1}{3}r'^2\delta_{\alpha,\beta})(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}) \tag{4.7}$$

wegen $\delta_{\alpha,\beta}(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha,\beta}r^2) = 3x_\alpha x_\alpha - r^2\delta_{\alpha,\alpha} = 0$. Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summationskonvention: Über alle Indices (von Komponenten), die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in (4.7) also über α und β.

Wir führen nun die Größen

$$q = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Ladung} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Dipolmoment} \tag{4.9}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int d^3r' (x_\alpha' x_\beta' - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Komponenten des Quadrupolmoments} \tag{4.10}$$

ein und erhalten damit die Entwicklung für das Potential und die elektrische Feldstärke

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + Q_{\alpha,\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta}}{2r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathrm{O}(\frac{1}{r^4}) \tag{4.12}$$

4.b Transformationseigenschaften

Die Multipolmomente sind definiert bezüglich eines vorgegebenen Punktes, zum Beispiel des Ursprungs. Verschiebt man den Bezugspunkt um $\mathbf{a}$, das heißt $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$, so findet man mit $\rho_1(\mathbf{r}'_1) = \rho(\mathbf{r}')$

$$q_1 = \int d^3r'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p}_1 = \int d^3r'_1 \mathbf{r}'_1 \rho_1(\mathbf{r}'_1) = \int d^3r' (\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}') = \mathbf{p} - \mathbf{a}q. \tag{4.14}$$

Die Gesamtladung ist unabhängig vom Bezugspunkt. Das Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugspunkt, falls $q = 0$ (reiner Dipol), sonst hängt es vom Bezugspunkt ab. Ähnlich findet man, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Bezugspunkt ist, falls $q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$ (reiner Quadrupol).
Unter Drehung $x'_{1,\alpha} = D_{\alpha,\beta} x'_\beta$ ist q invariant (Skalar), wobei D eine Drehmatrix sei, also eine orthogonale Transformation beschreibe. Der Dipol $\mathbf{p}$ transformiert sich wie ein Vektor

$$p_{1,\alpha} = \int d^3r' D_{\alpha,\beta} x'_\beta \rho(\mathbf{r}') = D_{\alpha,\beta} p_\beta \tag{4.15}$$

und der Quadrupol Q wie ein Tensor zweiter Stufe

$$Q_{1,\alpha,\beta} = \int d^3r' (D_{\alpha,\gamma} x'_\gamma D_{\beta,\delta} x'_\delta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta} r'^2)\rho(\mathbf{r}'). \tag{4.16}$$

Beachtet man, dass auf Grund der Orthogonalität von D

$$\delta_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\gamma} = D_{\alpha,\gamma} \delta_{\gamma,\delta} D_{\beta,\delta}, \tag{4.17}$$

so folgt

$$Q_{1,\alpha,\beta} = D_{\alpha,\gamma} D_{\beta,\delta} Q_{\gamma,\delta}, \tag{4.18}$$

also das Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe.

4.c Dipol

Der Prototyp eines Dipols besteht aus einer Ladung q am Ort $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ und einer entgegengesetzten Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Dipolmoment beträgt dann

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}. \tag{4.19}$$

Als Ladungsverteilung ergibt sich dann

$$\rho(\mathbf{r}) = q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \tag{4.20}$$

Wir führen nun eine Taylorentwicklung nach $\mathbf{a}$ durch

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - q\mathbf{a} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{2}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^2\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + ... - q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{4.21}$$

wobei sich der erste mit dem letzten Term weghebt. Wir führen nun den Limes $\mathbf{a} \to 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt als Ladungsverteilung eines Dipols $\mathbf{p}$ am Ort $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{4.22}$$

und sein Potential

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\
&= \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei die Gleichungen (B.61) verwendet und (B.50) gelöst wurden.

4.d Quadrupol

Der Quadrupol wird durch die zweiten Momente der Ladungsverteilung beschrieben.

4.d.α Symmetrien

Q ist ein symmetrischer Tensor

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\beta,\alpha}. \tag{4.24}$$

Er lässt sich daher ähnlich wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform bringen. Weiterhin folgt aus der Definition (4.10)

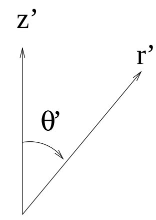
$$Q_{\alpha,\alpha} = 0, \tag{4.25}$$

das heißt die Spur des Quadrupol-Tensors verschwindet. Daher hat der Tensor nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Komponenten.

4.d.β Symmetrischer Quadrupol

Ein Spezialfall ist der symmetrische Quadrupol. Seine Ladungsverteilung hängt nur von z und dem Abstand von der z-Achse ab, $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$. Für ihn gilt

$$Q_{\mathrm{x,y}} = Q_{\mathrm{x,z}} = Q_{\mathrm{y,z}} = 0, \tag{4.26}$$



weil $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z) = \rho(x,-y,z)$. Weiter ist

$$Q_{\mathrm{x,x}} = Q_{\mathrm{y,y}} = -\frac{1}{2}Q_{\mathrm{z,z}} =: -\frac{1}{3}\hat{Q}. \tag{4.27}$$

Die erste Gleichung folgt aus $\rho(x,y,z)$=$\rho(y,x,z)$, die zweite daraus, dass die Spur von Q verschwindet. Das letzte Gleichheitszeichen gibt die Definition von $\hat{Q}$ an.

Man findet

$$\hat{Q} = \frac{3}{2}Q_{\mathrm{z,z}} = \int d^3r'(\frac{3}{2}z'^2 - \frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}') = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}') \tag{4.28}$$

mit dem Legendre-Polynom $P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$. Auf die Legendre-Polynome werden wir im nächsten Abschnitt und im Anhang C noch zurückkommen.

Als Beispiel betrachten wir noch den gestreckten Quadrupol mit zwei Ladungen q an den Orten $\pm a\mathbf{e}_{\mathrm{z}}$ und einer Ladung $-2q$ am Ursprung. Wir finden $\hat{Q} = 2qa^2$. Die einzelnen Ladungen tragen zum Quadrupolpotential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3x^2-r^2}{2r^5} - \frac{1}{3}\hat{Q}\frac{3y^2-r^2}{2r^5} + \frac{2}{3}\hat{Q}\frac{3z^2-r^2}{2r^5} = \frac{\hat{Q}P_2(\cos\theta)}{r^3} \tag{4.29}$$

bei.

4.e Energie, Kraft und Drehmoment auf einen Multipol im äußeren Feld

Eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, die um den Ursprung lokalisiert sei, sei in einem äußeren elektrischen Potential $\Phi_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})$, das etwa von einer entfernten Ladungsverteilung ρ_{a} erzeugt sei. Die Wechselwirkungsenergie beträgt dann

$$U = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\Phi_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}). \tag{4.30}$$

Hier tritt kein Faktor 1/2 vor dem Integral auf, wie man es wegen (3.24) annehmen könnte, da zum Integral über $\rho(\mathbf{r})\Phi_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})$ noch ein zweiter Beitrag mit dem Integral über $\rho_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ hinzutritt, der noch einmal den gleichen Beitrag liefert. Wir entwickeln nun das äußere Potential und erhalten für die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r\rho(\mathbf{r}) \left\{ \Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{r}\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}x_\alpha x_\beta \ \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + ... \right\} \\ &= q\Phi_\mathrm{a}(0) + \mathbf{p}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + \frac{1}{2}\left(Q_{\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int d^3r\rho(\mathbf{r})r^2 \right) \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} + ... \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der Beitrag proportional zum Integral über $\rho(\mathbf{r})r^2$ verschwindet, da $\nabla_\alpha\nabla_\alpha\Phi_\mathrm{a} = \triangle\Phi_\mathrm{a} = -4\pi\rho_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = 0$, da sich am Ursprung keine Ladungen befinden, die Φ_a erzeugen. Damit bleibt für das Wechselwirkungs-Potential

$$U = q\Phi_\mathrm{a}(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + \frac{1}{2}Q_{\alpha,\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi_\mathrm{a} + ... \tag{4.32}$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole, $\mathbf{p}_\mathrm{b}$ im Ursprung und $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ bei $\mathbf{r}_0$ bestimmen. Der Dipol $\mathbf{p}_\mathrm{a}$ erzeugt das Potential

$$\Phi_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}. \tag{4.33}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich dann zu (vgl. B.47)

$$U_\mathrm{a,b} = \mathbf{p}_\mathrm{b}\cdot\nabla\Phi_\mathrm{a}|_{r=0} = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{b}}{r_0^3} - \frac{3(\mathbf{p}_\mathrm{a}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_\mathrm{b}\mathbf{r}_0)}{r_0^5}. \tag{4.34}$$

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

$$\mathbf{K} = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r\rho(\mathbf{r})(\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + x_\alpha\nabla_\alpha\mathbf{E}_\mathrm{a}|_{r=0} + ...) = q\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + (\mathbf{p}\cdot \mathrm{grad}\,)\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + ... \tag{4.35}$$

Das Drehmoment auf einen Dipol im Ursprung ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\times\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}') = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_\mathrm{a}(0) + ... \tag{4.36}$$

5 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

5.a Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir leiten zunächst den Ausdruck für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

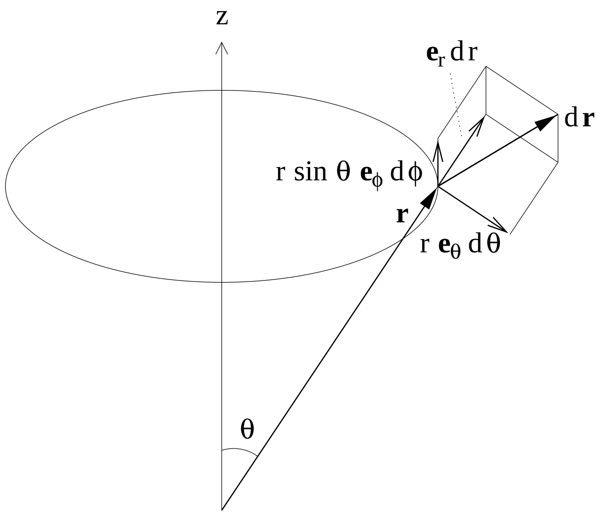
$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{5.1}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{5.2}$$
$$z = r \cos\theta \tag{5.3}$$

her. Dabei benützen wir zunächst nur, dass es sich dabei um krummlinige Koordinaten handelt, die sich unter rechtem Winkel schneiden, so dass wir

$$d\mathbf{r} = g_r \mathbf{e}_r dr + g_\theta \mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi \mathbf{e}_\phi d\phi \tag{5.4}$$

schreiben können, wobei die $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine orthonormierte ortsabhängige Basis bilden. Man findet leicht, dass

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r\sin\theta. \tag{5.5}$$



Das Volumenelement ist gegeben durch

$$d^3r = g_r dr g_\theta d\theta g_\phi d\phi = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega \tag{5.6}$$

mit dem Raumwinkelelement

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \tag{5.7}$$

5.a.α Der Gradient

Zur Berechnung des Gradienten betrachten wir das Differential einer Funktion $\Phi(\mathbf{r})$

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi, \tag{5.8}$$

die mit $(\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{r}$ übereinstimmen muss. Aus der Entwicklung des Vektorfeldes in seine Komponenten

$$\operatorname{grad}\Phi = (\operatorname{grad}\Phi)_r \mathbf{e}_r + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta \mathbf{e}_\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi \mathbf{e}_\phi \tag{5.9}$$

und (5.4) folgt dann

$$d\Phi(\mathbf{r}) = (\operatorname{grad}\Phi)_r g_r dr + (\operatorname{grad}\Phi)_\theta g_\theta d\theta + (\operatorname{grad}\Phi)_\phi g_\phi d\phi, \tag{5.10}$$

woraus wir

$$(\operatorname{grad}\Phi)_r = \frac{1}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad (\operatorname{grad}\Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{5.11}$$

für die Komponenten des Gradienten erhalten.

5.a.β Die Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz verwenden wir den Gaußschen Satz (B.59). Wir integrieren die Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ über ein Volumen begrenzt durch die Koordinaten $r, r+\Delta r$, $\theta, \theta+\Delta\theta$, $\phi, \phi+\Delta\phi$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\int d^3r \operatorname{div}\mathbf{A} &= \int g_r g_\theta g_\phi \operatorname{div}\mathbf{A}\, dr d\theta d\phi \\
= \int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{f} &= \int g_\theta d\theta g_\phi d\phi A_r|_r^{r+\Delta r} + \int g_r dr g_\phi d\phi A_\theta|_\theta^{\theta+\Delta\theta} + \int g_r dr g_\theta d\theta A_\phi|_\phi^{\phi+\Delta\phi} \\
&= \int \left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right] dr d\theta d\phi \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Da die Identität für beliebig kleine Volumina zutrifft, müssen die Integranden auf der rechten Seite der ersten Zeile und auf der dritten Zeile übereinstimmen. Daraus folgt

$$
\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_\theta g_\phi A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(g_r g_\phi A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_r g_\theta A_\phi)\right]. \qquad (5.13)
$$

5.a.γ Der Laplace-Operator

Durch Bildung von $\triangle\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ erhalten wir schließlich

$$
\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right]. \qquad (5.14)
$$

Diese Formel gilt noch generell für orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir sie mit r, θ, ϕ bezeichnen). Setzen wir nun die Werte für g ein, so folgt für sphärische Koordinaten

$$
\begin{aligned}
\triangle\Phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\Phi, \qquad (5.15)\\
\triangle_\Omega\Phi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Der Operator $\triangle_\Omega$ wirkt nur auf die beiden Winkel θ und ϕ, aber nicht auf den Abstand r. Er wird auch Laplace-Operator auf der Kugel genannt.

5.b Kugelflächenfunktionen

Wie wir im Anhang C näher ausführen, gibt es einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$, $m = -l, -l+1, ...l$, die der Gleichung

$$
\triangle_\Omega Y_{l,m}(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi) \qquad (5.17)
$$

genügen. Diese heißen Kugelflächenfunktionen. Vollständigkeit heißt: Ist $f(\theta,\phi)$ auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so lässt sich $f(\theta,\phi)$ darstellen als konvergente Summe

$$
f(\theta,\phi) = \sum_{l,m}\hat{f}_{l,m}Y_{l,m}(\theta,\phi). \qquad (5.18)
$$

Daher führen wir jetzt die entsprechende Entwicklung für $\Phi(\mathbf{r})$ und $\rho(\mathbf{r})$ durch

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m}\hat{\Phi}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi), \qquad (5.19)\\
\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m}\hat{\rho}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal, das heißt, das Integral über den Raumwinkel ergibt

$$\int d\Omega Y^*_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \tag{5.21}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung können wir zur Berechnung der $\hat{\Phi}$ und $\hat{\rho}$ verwenden

$$\begin{aligned}\int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r) \int d\phi \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l',m'}(\theta,\phi) \\ = \sum_{l',m'} \hat{\rho}_{l',m'}(r)\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} &= \hat{\rho}_{l,m}(r).\end{aligned} \tag{5.22}$$

Wir geben hier einige der Kugelflächenfunktionen an

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.23}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{5.24}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.25}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \tag{5.26}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \tag{5.27}$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}. \tag{5.28}$$

Allgemein ist

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5.29}$$

mit den zugeordneten Legendre-Funktionen

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!}(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l. \tag{5.30}$$

Generell ist $Y_{l,m}$ das Produkt aus $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi}$ und einem Polynom der Ordnung $l-|m|$ in $\cos\theta$. Je nachdem, ob $l-|m|$ gerade oder ungerade ist, handelt es sich dabei um ein gerades oder ungerades Polynom in $\cos\theta$. Es gilt die Symmetrie-Beziehung

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y^*_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.31}$$

5.c Radialgleichung und Multipol-Momente

Unter Verwendung der Entwicklung von Φ und ρ nach den Kugelflächenfunktionen lautet die Poisson-Gleichung nun

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\hat{\Phi}_{l,m}(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r)\right)Y_{l,m}(\theta,\phi) = -4\pi\sum_{l,m}\hat{\rho}_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{5.32}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $Y_{l,m}$ erhalten wir die Radialgleichungen

$$\hat{\Phi}''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}\hat{\Phi}'_{l,m}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\hat{\Phi}_{l,m}(r) = -4\pi\hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.33}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\hat{\Phi}_{l,m}(r) = a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-l-1}. \tag{5.34}$$

Für die inhomogene Gleichung macht man nun wie üblich den Ansatz (ich lasse im Moment die Indices l und m weg.)

$$\hat{\Phi} = a(r) r^l + b(r) r^{-l-1}. \tag{5.35}$$

Dann folgt

$$\hat{\Phi}' = a'(r) r^l + b'(r) r^{-l-1} + l a(r) r^{l-1} - (l+1) b(r) r^{-l-2}. \tag{5.36}$$

Wir fordern nun wie üblich

$$a'(r) r^l + b'(r) r^{-l-1} = 0 \tag{5.37}$$

und erhalten dann für die zweite Ableitung

$$\hat{\Phi}'' = l a'(r) r^{l-1} - (l+1) b'(r) r^{-l-2} + l(l-1) a(r) r^{l-2} + (l+1)(l+2) b(r) r^{-l-3}. \tag{5.38}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Radialgleichung ein, so heben sich die Anteile, die a und b ohne Ableitung enthalten, weg. Es bleibt

$$l a'(r) r^{l-1} - (l+1) b'(r) r^{-l-2} = -4\pi \hat{\rho}, \tag{5.39}$$

Aus den Gleichungen (5.37) und (5.39) folgt dann durch Auflösen nach a' und b'

$$\frac{da_{l,m}(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{2l+1} r^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r), \tag{5.40}$$

$$\frac{db_{l,m}(r)}{dr} = \frac{4\pi}{2l+1} r^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r). \tag{5.41}$$

Wir integrieren nun die Gleichungen

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_r^\infty dr' r'^{1-l} \hat{\rho}_{l,m}(r') \tag{5.42}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^r dr' r'^{l+2} \hat{\rho}_{l,m}(r'). \tag{5.43}$$

Addieren wir eine Konstante zu $a_{l,m}(r)$, so ist dies auch eine Lösung der Poisson-Gleichung, da $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$ homogene Lösung der Poisson-Gleichung ist. Wir wünschen aber eine Lösung, die für großes r abfällt. Daher wählen wir $a_{l,m}(\infty) = 0$. Addieren wir eine Konstante zu $b_{l,m}$, so ist das eine Lösung für $r \neq 0$. Für $r = 0$ hingegen erhält man eine Singularität, die die Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Daher muss man $b_{l,m}(0) = 0$ setzen.
Wir können nun die Entwicklungs-Koeffizienten $\hat{\rho}_{l,m}$ einsetzen und erhalten

$$a_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'>r} d^3r' r'^{-1-l} Y^*_{l,m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}') \tag{5.44}$$

$$b_{l,m}(r) = \frac{4\pi}{2l+1} \int_{r'<r} d^3r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}'). \tag{5.45}$$

Wir können nun die Ausdrücke für $a_{l,m}$ und $b_{l,m}$ in (5.19) und (5.35) einsetzen. Die r- und r'-Abhängigkeit ergibt sich für $r < r'$ aus dem a-Term zu r^l/r'^{l+1} und für $r > r'$ aus dem b-Term zu r'^l/r^{l+1}. Dies fasst man zusammen, indem man mit $r_>$ den größeren, mit $r_<$ den kleineren der beiden Radien r und r' bezeichnet. Dann folgt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^\infty \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \int d^3r' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \rho(\mathbf{r}') Y^*_{l,m}(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi). \tag{5.46}$$

Ist $\rho(\mathbf{r}')=0$ für $r'>R$, dann folgt für $r>R$

$$\Phi(\mathbf{r})=\sum_{l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}q_{l,m}\frac{Y_{l,m}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{5.47}$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{l,m}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3r' r'^l Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.48}$$

Für $l=0$ erhalten wir das "Monopolmoment" Ladung, für $l=1$ haben wir die Komponenten des Dipol-Moments, für $l=2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m=0$ hat man

$$q_{0,0} = \sqrt{4\pi}\int d^3r'\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\rho(\mathbf{r}')=q \tag{5.49}$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3r'\sqrt{\frac{3}{4\pi}}r'\cos\theta'\rho(\mathbf{r}')=\int d^3r' z'\rho(\mathbf{r}')=p_z \tag{5.50}$$

$$q_{2,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int d^3r'\sqrt{\frac{5}{4\pi}}r'^2(\frac{3}{2}\cos^2\theta'-\frac{1}{2})\rho(\mathbf{r}')=\int d^3r'(\frac{3}{2}z'^2-\frac{1}{2}r'^2)\rho(\mathbf{r}')=\frac{3}{2}Q_{zz}. \tag{5.51}$$

5.d Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$, zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r}'$. Wir können ausgehen von dem bekannten Potential

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{q}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}. \tag{5.52}$$

Dabei ist ψ der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Wir entwickeln nun nach $r_</r_>$

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{q}{r_>\sqrt{1+(\frac{r_<}{r_>})^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\psi}}=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\psi). \tag{5.53}$$

Dabei bezeichnet man $P_l(\xi)$ als Legendre-Polynome. Für $\cos\psi=\pm1$ sieht man sofort aus der Entwicklung von $1/(r_>\mp r_<)$, dass $P_l(1)=1$ und $P_l(-1)=(-)^l$ gilt.
Wir können andererseits auch mit (5.46) arbeiten und finden

$$\Phi(\mathbf{r})=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y^*_{l,m}(\theta',\phi'). \tag{5.54}$$

Durch Vergleich findet man das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos\psi)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\phi)Y^*_{l,m}(\theta',\phi'), \tag{5.55}$$

wobei sich der Winkel ψ zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ausdrücken lässt durch $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'=rr'\cos\psi$ und unter Verwendung von (5.1-5.3)

$$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'). \tag{5.56}$$

Wir betrachten jetzt noch den Spezialfall $\theta'=0$, das heißt $\psi=\theta$. Dann verschwinden alle $Y_{l,m}(\theta',\phi')$ wegen der Faktoren $\sin\theta'$ außer denen für $m=0$ und das Additions-Theorem reduziert sich auf

$$P_l(\cos\theta)=\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,0}(\theta)Y_{l,0}(0)=P_l^0(\cos\theta)P_l^0(1). \tag{5.57}$$

Aus der Darstellung (5.30) $P_l^0(\xi) = 1/(2^l l!)d^l(\xi^2-1)^l/d\xi^l$ folgt für $\xi = 1$ und Zerlegen $(\xi^2-1)^l = (\xi+1)^l(\xi-1)^l$ das Ergebnis $P_l^0(1) = [(\xi+1)^l/2^l]_{\xi=1}[d^l(\xi-1)^l/d\xi^l/l!]_{\xi=1} = 1$. Damit haben wir gefunden, dass

$$P_l^0(\xi) = P_l(\xi) \tag{5.58}$$

gilt.
Speziell für zylindersymmetrische Verteilungen $\rho(\mathbf{r})$, die also nur von r und θ, aber nicht von ϕ abhängen, gilt dann

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} q_{l,0} \tag{5.59}$$

mit den Momenten

$$q_{l,0} = \int d^3r' r'^l P_l(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}'). \tag{5.60}$$

Alle Momente mit $m \neq 0$ verschwinden für die zylindersymmetrische Verteilung.
Aufgabe Berechnen Sie aus (5.1) bis (5.5) die Vektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und prüfen Sie nach, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.
Aufgabe Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes (B.56) die Rotation in Kugelkoordinaten
Aufgabe Berechnen Sie für Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ und z die metrischen Faktoren g_ρ, g_ϕ und g_z, das Volumenelement und Gradient und Divergenz.

6 Elektrisches Feld in Materie

6.a Polarisation und dielektrische Verschiebung

Die bisher aufgestellten Feldgleichungen gelten auch in Materie. Auf ein äußeres elektrisches Feld reagiert die Materie im allgemeinen durch Polarisation. Die Elektronen verschieben sich gegenüber den Kernen, wodurch Dipole entstehen, oder bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung aus. Ein elektrisches Feld bewirkt also die Verschiebung von Ladungen q_i vom Ort $\mathbf{r}_i$ zum Ort $\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i$, das heißt Dipole $\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{a}_i$ werden induziert. Man erhält die Ladungsverteilung oder Polarisationsladungen (4.22)

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \operatorname{grad} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{6.1}$$

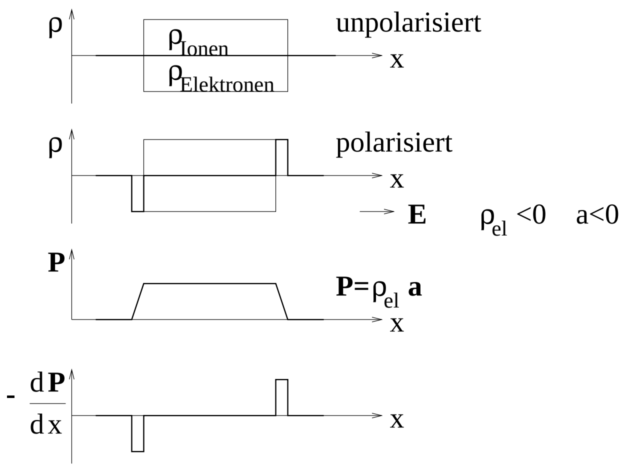
Führen wir eine Dipolmomentdichte $\mathbf{P}$ ein, die man als Polarisation bezeichnet,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \tag{6.2}$$

so folgt

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = -\int d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\operatorname{div}\left(\int d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.3}$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir gehen aus von einem Festkörper, in dem sich (auf einer Skala groß gegen den Atomabstand) die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren (oberste Figur).Legt man ein Feld $\mathbf{E}$ an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen (zweite Figur). Im Inneren hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation $\mathbf{P} = \rho_{\mathrm{el}} \mathbf{a}$ aufgezeichnet, wobei diese am Rand stetig ausgeschmiert wurde.Im letzten Bild ist die Ableitung $-d\mathbf{P}/dx$ aufgetragen. Man sieht, dass die das letzte Bild mit der Ladungsdichte im zweiten übereinstimmt.



Damit setzt sich die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte ρ_{f} und der Polarisations-Ladungsdichte ρ_{P} (erstere kann zum Beispiel die Ladungsdichte sein, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \rho_{\mathrm{P}}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{6.4}$$

Damit führt man in der Maxwellgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{6.5}$$

die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ ein

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \tag{6.6}$$

so dass

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) \tag{6.7}$$

gilt. Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_{\rm f}(V)$ in diesem Volumen

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\rm f}(V). \tag{6.8}$$

Für viele Substanzen sind bei nicht zu großer Feldstärke **P** und **E** in guter Näherung proportional

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_{\rm e}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \chi_{\rm e} \text{ elektrische Suszeptibilität} \tag{6.9}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \epsilon \text{ (relative) Dielektrizitätskonstante} \tag{6.10}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_{\rm e}. \tag{6.11}$$

$\chi_{\rm e}$ und ϵ sind Tensoren für anisotrope Materialien, sonst Skalare. Bei Ferroelektrika ist **P** bereits für $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ von **0** verschieden. Allerdings ist die Polarisationsladung meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Doch wird sie offensichtlich, wenn die Polarisation durch äußere Änderungen verändert wird, zum Beispiel durch Druck beim Quarz (Piezoelektrizität) oder Temperaturveränderung.
Im Gaußschen System sind die Dimensionen von **D**, **E** und **P** übereinstimmend dyn$^{1/2}$ cm^{-1}. Im SI-System wird aber **E** in V/m, **D** und **P** in As/m^2 gemessen. Da das SI-System ein rationales Maßsystem ist, das Gaußsche ein irrationales, unterscheiden sich die Umrechnungsfaktor für **D** und **P** um 4π. Dementsprechend unterscheiden sich auch die χ_e in beiden Systemen um einen Faktor 4π. Dagegen sind die relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ identisch. Genaueres findet sich im Anhang A.

6.b Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten nun die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Aus der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes tangential zur Grenzfläche in beiden Dielektrika übereinstimmen

$$\mathbf{E}_{1,\rm t} = \mathbf{E}_{2,\rm t}. \tag{6.12}$$

Um dies zu sehen, muss man nur ein Linienintegral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, das parallel zur Grenzfläche in einem Dielektrikum hin, im anderen zurückführt, ausführen und in das Flächenintegral $\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ überführen. Man sieht dann, dass das Linienintegral verschwindet. Sind die Integrationswege in den beiden Dielektrika infinitesimal benachbart, so folgt, da das für beliebige Wege gilt, dass $\mathbf{E}_{\rm t}$ in beiden Dielektrika übereinstimmen muss.
Andererseits können wir ein "Gaußsche Dose" einführen, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt in einem Dielektrikum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im anderen Dielektrikum verläuft. Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so gilt $\int_V d^3r \operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, was dazu führt, dass man auf der Oberfläche $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = 0$ hat. Rückt man die Oberfläche nun an die Grenzfläche heran, so folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten von **D**

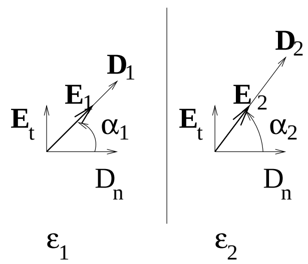
$$D_{1,\rm n} = D_{2,\rm n}. \tag{6.13}$$

Schließt das elektrische Feld (in isotropen Dielektrika) mit der Flächennormalen die Winkel α_1 und α_2 ein, so gilt

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \tag{6.14}$$

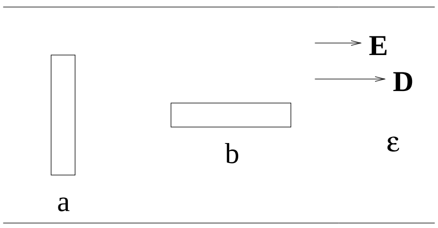
$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 \tag{6.15}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan\alpha_2}{\epsilon_2}. \tag{6.16}$$



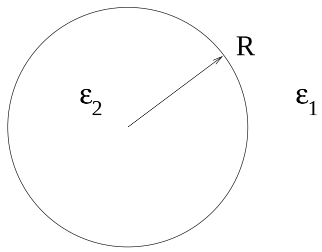
Wir betrachten jetzt einen Hohlraum im Dielektrikum. Ist der Hohlraum sehr dünn in Richtung des Feldes (a) und in beiden dazu senkrechten Richtungen vergleichsweise sehr ausgedehnt, dann stimmt die dielektrische Verschiebung **D** im Hohlraum und im Dielektrikum überein.

Handelt es sich dabei um einen sehr langgestreckten Hohlraum in Richtung des Feldes (b), so muss der Abfall des Potentials in dieser langgestreckten Richtung übereinstimmen, so dass im Inneren und im Äußeren des Hohlraums das elektrische Feld **E** übereinstimmt.Daneben treten vor allem an den Rändern auch Streufelder auf. Es ist für Ellipsoide möglich, das Feld im Innern eines Hohlraums exakt zu berechnen. Siehe zum Beispiel im Buch von Becker und Sauter. Das Feld im Inneren des Ellipsoids ist homogen. Für die Kugel führen wir die Berechnung anschließend durch.



6.c Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ_2, die in ein anderes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 eingebettet ist. Im Dielektrikum 1 herrsche in sehr großer Entfernung ein homogenes Feld



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z \quad r \gg R. \tag{6.17}$$

Daraus folgt das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r} = -E_1 r \cos\theta \quad r \gg R. \tag{6.18}$$

Da $\cos\theta$ das Legendre-Polynom $P_1(\cos\theta)$ ist, führt der Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(r)\cos\theta \tag{6.19}$$

zum Erfolg. Die Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\triangle(f(r)\cos\theta) = 0$ ist eine Linearkombination (5.34) aus $f(r) = r$ (homogenes Feld) und $f(r) = 1/r^2$ (Dipolfeld). Da am Ursprung kein makroskopischer Dipol sitzt, können wir ansetzen

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos\theta \cdot \begin{cases} -E_2 r & r \le R \\ -E_1 r + p/r^2 & r \ge R \end{cases} . \tag{6.20}$$

An der Grenzfläche gilt $\Phi(R+0) = \Phi(R-0)$, was identisch ist mit $\mathbf{E}_{1,\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2,\mathrm{t}}$ und auf

$$-E_1 R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R \tag{6.21}$$

führt. Die Bedingung $D_{1,\mathrm{n}} = D_{2,\mathrm{n}}$ führt mit $D_\mathrm{n} = -\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial r}$ auf

$$\epsilon_1 (E_1 + \frac{2p}{R^3}) = \epsilon_2 E_2. \tag{6.22}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1 \tag{6.23}$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1. \tag{6.24}$$

Speziell für die dielektrische Kugel ($\epsilon_2 = \epsilon$) im Vakuum ($\epsilon_1 = 1$) folgt

$$E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1, \quad p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_1. \tag{6.25}$$

Die Polarisation im Inneren der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Felds um

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{1-\epsilon}{2+\epsilon} E_1 \mathbf{e}_z = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.26}$$

Für eine Hohlkugel ($\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum ($\epsilon_1 = \epsilon$) erhält man dagegen

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_1. \tag{6.27}$$

6.d Dielektrizitätskonstante nach Clausius und Mosotti

Clausius und Mosotti leiten die Dielektrizitätskonstante aus der Polarisierbarkeit α der Moleküle (Atome) wie folgt her: Im Feld $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ ist das mittlere Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \tag{6.28}$$

Bei einer Dichte der Dipole (Atome) n ergibt sich die Polarisation

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \tag{6.29}$$

Wir müssen daher das effektive Feld $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ bestimmen, das auf den Dipol wirkt.
Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir am Beispiel der dielektrischen Kugel im Vakuum aus (6.26) sehen, ein mittleres Feld

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{P}} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{6.30}$$

Dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. Dafür ist das schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole innerhalb der Kugel zu addieren (mit Ausnahme des Dipols, an dessen Stelle das Feld bestimmt werden soll)

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}_{\text{P}} + \sum_i \frac{-\mathbf{p}_i r_i^2 + 3(\mathbf{p}_i \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5}. \tag{6.31}$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole (Kristallstruktur) ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe, denn die Beiträge aus

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha p_\beta \sum_i \frac{-\delta_{\alpha,\beta} r_i^2 + 3x_{i,\alpha} x_{i,\beta}}{r_i^5} \tag{6.32}$$

heben sich für $\alpha \neq \beta$ weg, wenn man die Beiträge jeweils für x_α und $-x_\alpha$ zusammenfasst, die für $\alpha = \beta$, wenn man die drei Beiträge, die man durch zyklisches Permutieren der drei Komponenten erhält, zusammenfasst. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

$$\chi_{\text{e}} \mathbf{E} = \mathbf{P} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}) = n\alpha(1 + \frac{4\pi}{3}\chi_{\text{e}})\mathbf{E}, \tag{6.33}$$

woraus

$$\chi_{\text{e}} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}} \quad \text{oder} \quad \frac{4\pi}{3} n\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \tag{6.34}$$

folgt.

7 Elektrizität auf Leitern

7.a Elektrische Leiter

Innerhalb eines Leiters ist das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, da ein von Null verschiedenes Feld sofort die Ladungen verschieben würde. Das Potential ist daher in jedem Leiter konstant. Für den Leiter $\#i$ gilt daher $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$.
Außerhalb der Leiter ist der Potentialverlauf durch die Poisson-Gleichung gegeben

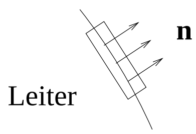
$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \text{ oder } \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})) = -4\pi\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}). \tag{7.1}$$

7.a.α Randbedingungen an der Leiteroberfläche

An der Leiteroberfläche hat man ein konstantes Potential (auch auf der Seite des Dielektrikums). Daher verschwinden die Komponenten von $\mathbf{E}$ tangential zur Oberfläche

$$\mathbf{E}_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

Auf der Leiteroberfläche befinden sich in der Regel Influenzladungen. Wir bezeichnen die Oberflächenladungsdichte mit $\sigma(\mathbf{r})$.



Bei Integration über ein Stück der Oberfläche folgt dann

$$\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi q = 4\pi \int df\, \sigma(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

Daher gilt für die Feldstärke $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}$ an der Oberfläche im Außenraum

$$\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{7.4}$$

Im allgemeinen wird sich die Ladungsdichte σ an der Oberfläche zusammensetzen aus der freibeweglichen σ_{f} auf der Leiteroberfläche und der Polarisationsladungsdichte σ_{P} auf dem Dielektrikum $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \sigma_{\mathrm{P}}(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{D}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) = 4\pi\sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r})\mathbf{n}, \tag{7.5}$$

woraus dann mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$

$$\sigma_{\mathrm{f}} = \epsilon(\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}), \quad \sigma_{\mathrm{P}} = (\frac{1}{\epsilon} - 1)\sigma_{\mathrm{f}} \tag{7.6}$$

folgt.

7.a.β Kraft auf Leiter (im Vakuum)

Zunächst könnte man vermuten, die Kraft sei gegeben durch $\int df \mathbf{E}_{\mathrm{a}}\sigma(\mathbf{r})$. Dies ist aber falsch. Denn genau so könnte man argumentieren, man müsse das Feld im Leiter $\mathbf{E}_{\mathrm{i}} = \mathbf{0}$ einsetzen. Die Wahrheit liegt in der Mitte. Dies erkennt man, wenn man davon ausgeht, dass die Ladung nicht exakt auf der Oberfläche sitzt, sondern über eine Schichtdicke l verschmiert ist. Nehmen wir an innerhalb einer Schicht der Dicke a befindet sich die Ladung $s(a)\sigma(\mathbf{r})df$ mit $s(0) = 0$ und $s(l) = 1$, dann wirkt in der Tiefe a die Feldstärke $\mathbf{E}_{\mathrm{i}}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = (1 - s(a))\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})$, da der Bruchteil $s(a)$ bereits abgeschirmt ist. Mit $\rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = s'(a)\sigma(\mathbf{r})$ folgt dann

$$\mathbf{K} = \int df\, da \rho(\mathbf{r} - a\mathbf{n})\mathbf{E}(\mathbf{r} - a\mathbf{n}) = \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) \int_0^l da s'(a)(1 - s(a)). \tag{7.7}$$

Das Integral über a ergibt $(s(a) - s^2(a)/2)|_0^l = 1/2$, so dass wir schließlich die Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) \tag{7.8}$$

erhalten.

7.b Kapazitäten

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum oder in Dielektrika. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten, $\rho_{\rm f} = 0$. Die elektrischen Potentiale Φ_i der Leiter $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die freibeweglichen Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Maxwell-Gleichungen linear sind (und wir annehmen, dass lineare Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ bestehen), können wir das Potential als Superposition von Lösungen Ψ_i schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Dabei ist Ψ_i die Lösung, die auf dem Leiter $\#i$ den Wert 1, auf den anderen den Wert 0 annimmt

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta_{i,j} \quad \mathbf{r} \in \text{ Leiter } j. \tag{7.10}$$

Die Ladung auf dem Leiter $\#i$ ist dann gegeben durch

$$q_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\rm a} = \sum_j C_{i,j}\Phi_j \tag{7.11}$$

mit den Kapazitätskoeffizienten

$$C_{i,j} = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_i} df \epsilon \left.\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}\right|_{\rm a}. \tag{7.12}$$

Im Gaußschen Maßsystem hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so dass 1 cm $\hat{=}$ $1/9 \cdot 10^{-11}$ As/V = 10/9 pF (Picofarad).
Die elektrostatische Energie ergibt sich aus

$$dU = \sum_i \Phi_i dq_i = \sum_{i,j} \Phi_i C_{i,j} d\Phi_j, \tag{7.13}$$

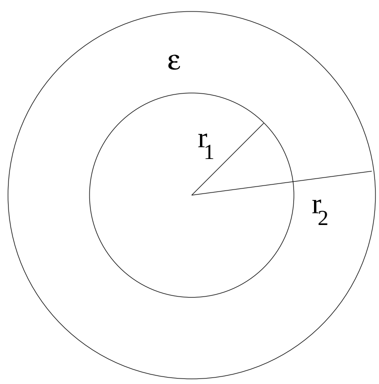
das heißt

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = \sum_i C_{i,j}\Phi_i, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} = C_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_j\partial\Phi_i} = C_{j,i}, \tag{7.15}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{i,j}\Phi_i\Phi_j = \frac{1}{2}\sum_i \Phi_i q_i \tag{7.16}$$

Als Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator. Zwei konzentrische leitende Kugeln mit Radien r_1, r_2, wobei $r_1 < r_2$, seien mit den Ladungen q_1 und q_2 belegt. Der Außenraum sei Vakuum. Zwischen den beiden Kugeln sei ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ. Im Außenraum gilt dann



$$\Phi(r) = \frac{q_1+q_2}{r} \quad r \geq r_2. \tag{7.17}$$

Im Raum zwischen den beiden Kugeln hat man einen Abfall des Potentials der Form $q_1/(\epsilon r)$. Da das Potential bei $r = r_2$ stetig sein muss, folgt

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1+q_2}{r_2} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \tag{7.18}$$

In der kleineren Kugel ist das Potential konstant.

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r_1} - \frac{q_1}{\epsilon r_2} + \frac{q_1+q_2}{r_2} \quad r \le r_1. \tag{7.19}$$

Daraus errechnen sich dann die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(r_i)$

$$q_1 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.20}$$

$$q_2 = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}(\Phi_2 - \Phi_1) + r_2\Phi_2, \tag{7.21}$$

aus denen man die Kapazitätskoeffizienten unmittelbar ablesen kann. Falls das System neutral ist $q = q_1 = -q_2$, kann man q durch die Potentialdifferenz ausdrücken

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.22}$$

und bezeichnet C als die Kapazität. Für den Kugelkondensator finden wir $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$, woraus die Kapazität

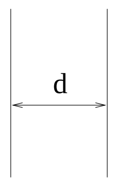
$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{7.23}$$

folgt.
Für eine einzelne Kugel können wir r_2 gegen ∞ gehen lassen und finden $C = \epsilon r_1$.
Den Plattenkondensator mit Plattenabstand d erhalten wir, indem wir $r_2 = r_1 + d$ setzen und dann großes r_1 betrachten. Wir finden

$$C = \frac{(r_1^2 + r_1 d)\epsilon}{d} = \frac{4\pi r_1^2 \epsilon}{d}(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi r_1}), \tag{7.24}$$

was für große r_1 gegen $\frac{\epsilon F}{4\pi d}$ mit der Fläche F geht. Daher erhält man für den Plattenkondensator

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d}. \tag{7.25}$$



Eine andere Überlegung ist die Folgende: Die Ladung q erzeugt einen Fluss $DF = 4\pi q$. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten $\Phi = \frac{D}{\epsilon}d = \frac{4\pi d}{\epsilon F}q$, woraus $C = q/\phi = \frac{\epsilon F}{4\pi d}$ folgt. Man beachte, dass wir hier mit q die freibewegliche Ladung bezeichnet haben.

7.c Influenzladungen

Halten wir die Potentiale der Leiter auf 0, $\Phi_i = 0$ und haben wir eine freibewegliche Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$, so beschreiben wir das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q' \tag{7.26}$$

mit der Greenschen Funktion G. Offensichtlich genügt diese der Gleichung

$$\nabla(\epsilon(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7.27}$$

für $\mathbf{r}$ außerhalb der Leiter. Für $\mathbf{r}$ auf den Leiteroberflächen ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Für eine Ladungsverteilung $\rho_{\rm f}(\mathbf{r}')$ außerhalb der Leiter gilt dann nach dem Superpositionsprinzip

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_{\rm f}(\mathbf{r}') + \sum_i \Phi_i \Psi_i(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

wobei wir jetzt angenommen haben, dass die Leiter auf den Potentialen Φ_i liegen.
Wir zeigen nun, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Zum Beweis gehen wir aus vom Integral über die Leiteroberflächen

$$\int d\mathbf{f}'' \cdot \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - \epsilon(\mathbf{r}'')[\nabla'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})]G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\} = 0, \tag{7.29}$$

da G auf den Leiteroberflächen verschwindet. Das Flächenelement $d\mathbf{f}''$ weise in die Leiter. Wir erstrecken das Integral auch über eine Kugel vom Radius R, die alle Leiter einschließt. Wegen $G \sim 1/R$ und $\nabla''G \sim 1/R^2$ verschwindet das Oberflächenintegral für $R \to \infty$. Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')] - \nabla''[\epsilon(\mathbf{r}'')\nabla''G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})]G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.30}$$

$$= -4\pi \int d^3r''\{G(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') - \delta^3(\mathbf{r}''-\mathbf{r})G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\} \tag{7.31}$$

$$= -4\pi(G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}')) = 0. \tag{7.32}$$

Wir betrachten nun einige Beispiele:

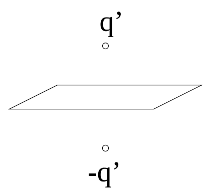
7.c.α Leiterfreier Raum

Im leiterfreien Raum mit konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ gilt

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{7.33}$$

7.c.β Leitende Ebene

Für eine leitende Ebene $z = 0$ ($\epsilon = 1$) löst man das Problem durch eine Spiegelladung. Befindet sich die gegebene Ladung q' am Ort $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, so denke man sich eine zweite Ladung $-q'$ am Ort $\mathbf{r}'' = (x',y',-z')$. Diese kompensiert gerade das Potential an der Leiteroberfläche. Es folgt



$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für } \operatorname{sign} z = \operatorname{sign} z' \\ 0 & \text{für } \operatorname{sign} z = -\operatorname{sign} z'. \end{cases} \tag{7.34}$$

Als nächstes betrachten wir die Kraft, die auf die Ladung q' wirkt. Das Potential ist $\Phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')q'$. Dabei ist der Anteil $q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ das Potential von q' selbst, das auf q' keine Kraft ausübt. Der zweite Beitrag $-q'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ rührt dagegen von den Influenz-Ladungen auf der Metallebene her und bewirkt die Kraft

$$\mathbf{K} = -q' \operatorname{grad} \frac{-q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} = -\frac{q'^2\mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.35}$$

Weiter bestimmen wir die Influenz-Ladung auf der Platte. Bei $z = 0$ haben wir $4\pi \operatorname{sign} z' \mathbf{e}_z \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - q' \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}$. Daraus ergibt sich die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'}{2\pi} \frac{|z'|}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}^3} \tag{7.36}$$

Mit $df = \pi d(x^2+y^2)$ folgt dann

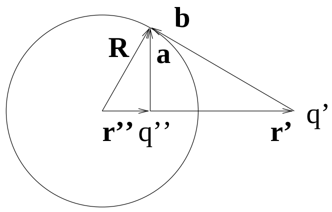
$$\int df \sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q'|z'|}{2} \int_{z'^2}^{\infty} \frac{d(x^2+y^2+z'^2)}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}} = -q'. \tag{7.37}$$

Die Kraft auf die Platte errechnet sich zu

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int df \mathbf{E}(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}) = \frac{q'^2 z'|z'|}{2} \mathbf{e}_z \int \frac{d(x^2+y^2+z'^2)}{(x^2+y^2+z'^2)^3} = \frac{q'^2\mathbf{e}_z}{4z'^2} \operatorname{sign} z'. \tag{7.38}$$

7.c.γ Leitende Kugel

Wir betrachten eine Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ in Gegenwart einer leitenden Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung. Es gibt dann einen Vektor $\mathbf{r}''$, so dass das Verhältnis der Abstände von allen Punkten $\mathbf{R}$ der Kugeloberfläche von $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ konstant ist. Es sei



$$a^2 := (\mathbf{R}-\mathbf{r}'')^2 = R^2 + r''^2 - 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}'' \qquad (7.39)$$

$$b^2 := (\mathbf{R}-\mathbf{r}')^2 = R^2 + r'^2 - 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}' \qquad (7.40)$$

Diese Konstanz des Verhältnisses der Abstände ist erfüllt für $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ und

$$\frac{R^2 + r''^2}{R^2 + r'^2} = \frac{r''}{r'}. \qquad (7.41)$$

Dann gilt

$$R^2 = r'r'' \quad \mathbf{r}'' = \frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}' \qquad (7.42)$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r''}{r'} = \frac{R^2}{r'^2} = \frac{r''^2}{R^2}. \qquad (7.43)$$

Man findet damit ein konstantes Potential auf der Kugel mit der Ladung q' am Ort $\mathbf{r}'$ und der Ladung $q'' = -q'R/r'$ am Ort r''

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} & \text{für } \operatorname{sign}(r-R) = \operatorname{sign}(r'-R), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \qquad (7.44)$$

Mit diesem G verschwindet das Potential auf der Kugel. Für $r' > R$ trägt sie die Ladung q'' und für $r' < R$ die Ladung $-q'$. Daher muss man für eine neutrale Kugel zum Potential Φ noch den Beitrag hinzufügen, der von einer gleichmäßig auf der Kugel verteilten Ladung $-q''$ beziehungsweise q' herrührt.

8 Energie, Kräfte und Spannungen im Dielektrikum

8.a Elektrostatische Energie

Bei Verschiebung der Ladungsdichten $\delta\rho = \delta\rho_{\rm f} + \delta\rho_{\rm P}$ wird die elektrostatische Energie

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f} \Phi + \int d^3r \delta\rho_{\rm P} \Phi \tag{8.1}$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie zusätzliche innere Potentiale $\Phi_{\rm i}$ vorhanden, so dass die Polarisation im Gleichgewicht ist, das heißt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_{\rm f} \Phi + \int d^3r \delta\rho_{\rm P} (\Phi + \Phi_{\rm i}). \tag{8.2}$$

Diese Potentiale müssen so beschaffen sein, dass $\delta U = 0$ für eine Variation der Polarisation gilt, damit die Polarisationen im Gleichgewicht sind

$$\Phi + \Phi_{\rm i} = 0. \tag{8.3}$$

Diese Überlegungen gelten bei adiabatisch geführten Prozessen und unter der Bedingung, dass keine mechanische Energie zugeführt wird. Die Materie muss sich also in einem kräftefreien Zustand (Gleichgewicht $\mathbf{k} = \mathbf{0}$) befinden oder sie muss festgehalten werden. Damit folgt mit (B.62)

$$\delta U = \int d^3r \, \delta\rho_{\rm f} \, \Phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \, {\rm div} \, \delta\mathbf{D} \, \Phi = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \delta\mathbf{D} \cdot {\rm grad} \, \Phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}, \tag{8.4}$$

ähnlich zum materiefreien Fall (3.25). Damit gilt für die Energiedichte bei fester Massendichte $\rho_{\rm m}$ (wir nehmen hier an, dass außer dem elektrischen Feld nur die Massendichte die Energiedichte festlegt; tatsächlich wird im Allgemeinen der Verzerrungszustand wesentlich sein)

$$du = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}. \tag{8.5}$$

Falls $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, so folgt

$$u = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{4\pi} \int \epsilon(\rho_{\rm m}) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{1}{8\pi} \epsilon(\rho_{\rm m}) E^2 = u_0(\rho_{\rm m}) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon(\rho_{\rm m})}, \tag{8.6}$$

da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen von der Massendichte abhängt.

8.b Kraftdichte im isotropen Dielektrikum

Wir können die Kraftdichte in einem Dielektrikum bestimmen, indem wir die Massen und freibeweglichen Ladungen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$ verschieben und die Energieänderung δU bestimmen. Die dem System dabei zugeführte Energie ist

$$\delta U = \int d^3r \, \mathbf{k}_{\rm a}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{8.7}$$

wobei $\mathbf{k}_{\rm a}$ die von außen angreifende Kraftdichte ist. Im Gleichgewicht ist die entgegenwirkende innere elektrische und mechanische Kraftdichte $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_{\rm a}(\mathbf{r}), \tag{8.8}$$

so dass

$$\delta U = -\int d^3r \, \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}) \tag{8.9}$$

gelten muss. Wir bringen nun δU auf diese Form

$$\delta U = \int d^3r \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{D}} \cdot \delta \mathbf{D} + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}}\right|_{\mathbf{D}} \delta \rho_{\mathrm{m}} \right), \quad u = u(\mathbf{D}, \rho_{\mathrm{m}}). \tag{8.10}$$

Wegen $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ formen wir den ersten Term wie im vorhergehenden Abschnitt um in

$$\delta U = \int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \left.\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}}\right|_{\mathbf{D}} \delta \rho_{\mathrm{m}} \right). \tag{8.11}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $d\rho/dt = -\operatorname{div} \mathbf{j}$ leiten wir nun den Zusammenhang zwischen $\delta\rho$ und $\delta\mathbf{s}$ her. Man muss die Gleichung nur mit δt multiplizieren und berücksichtigen, dass $\mathbf{j}\delta t = \rho \mathbf{v} \delta t = \rho \delta \mathbf{s}$ gilt. Mit $(d\rho/dt)\delta t = \delta\rho$ erhalten wir

$$\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\mathbf{s}). \tag{8.12}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \delta U &= -\int d^3r \left(\Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{f}} \delta \mathbf{s}) + \frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{m}} \delta \mathbf{s}) \right) \\ &= \int d^3r \left(\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) + \left(\operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} \right) \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta \mathbf{s}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile der Gaußsche Satz (B.62) verwendet wurde. Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} \right). \tag{8.14}$$

Der erste Beitrag ist die Coulomb-Kraft auf die freien Ladungsträger. Den zweiten Beitrag formen wir noch um. Wir setzen (8.6) $u = u_0(\rho_{\mathrm{m}}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_{\mathrm{m}}))$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_{\mathrm{m}}} = \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{8\pi} D^2 \frac{d(1/\epsilon)}{d\rho_{\mathrm{m}}} = \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}. \tag{8.15}$$

Der erste Term kann geschrieben werden

$$-\rho_{\mathrm{m}} \operatorname{grad} \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} = -\operatorname{grad} \left(\rho_{\mathrm{m}} \frac{du_0}{d\rho_{\mathrm{m}}} - u_0 \right) = -\operatorname{grad} P_0(\rho_{\mathrm{m}}), \tag{8.16}$$

wobei wir verwenden, dass $(du_0/d\rho_{\mathrm{m}}) \operatorname{grad} \rho_m = \operatorname{grad} u_0$. Hierbei ist P_0 der hydrostatische Druck der Flüssigkeit ohne elektrisches Feld

$$\mathbf{k}_{0,\mathrm{hydro}} = -\operatorname{grad} P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})). \tag{8.17}$$

Die auf das Volumen V wirkende hydrostatische Kraft kann dann umgeformt werden in ein Oberflächenintegral

$$\mathbf{K}_0 = -\int_V d^3r \operatorname{grad} P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f} P_0(\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r})). \tag{8.18}$$

Dies ist eine Kraft, die auf die Oberfläche ∂V mit dem Druck P_0 wirkt. Es bleibt noch der elektrostriktive Anteil

$$\frac{1}{8\pi} \rho_{\mathrm{m}} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} \right) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_{\mathrm{m}} \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \epsilon, \tag{8.19}$$

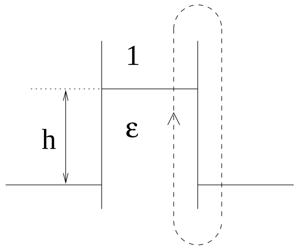
wobei $(d\epsilon/d\rho_{\mathrm{m}}) \operatorname{grad} \rho_{\mathrm{m}} = \operatorname{grad} \epsilon$ verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich dann die Kraftdichte zu

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} \left(-P_0(\rho_{\mathrm{m}}) + \frac{1}{8\pi} E^2 \rho_{\mathrm{m}} \frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \epsilon. \tag{8.20}$$

Anwendungen:
Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten. Um welche Höhe h steht die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten höher als im feldfreien Raum? Wir führen dazu das Integral über einen geschlossenen Weg zwischen den Kondensatorplatten nach oben und außerhalb nach unten

$$\oint \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \oint \operatorname{grad}\left(-P_0 + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_{\mathrm{m}}\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_{\mathrm{m}}}\right)\cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\oint E^2 \operatorname{grad}\epsilon\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi}E^2(\epsilon-1). \tag{8.21}$$

Dabei verschwindet das Integral des Gradienten über den geschlossenen Weg, während das Integral über $E^2 \operatorname{grad}\epsilon$ nur etwas an den beiden Punkten ergibt, an denen der Integrationsweg durch die Flüssigkeitsoberfläche tritt. Zusätzlich zu diesen Kräften kommt noch die Gravitationskraft. Beide müssen sich die Waage halten



$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = \mathbf{0}, \tag{8.22}$$

also

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = -\rho_{\mathrm{m}}gh = -\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}, \tag{8.23}$$

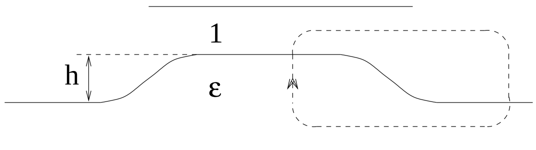
woraus sich die Höhe

$$h = \frac{E^2(\epsilon-1)}{8\pi\rho_{\mathrm{m}}g} \tag{8.24}$$

ergibt.

Dielektrische Flüssigkeit zwischen zwei waagrechten Kondensatorplatten

Wie groß ist die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen zwei horizontalen Kondensatorplatten? Das Problem lässt sich ähnlich lösen wie zwischen zwei senkrechten Kondensatorplatten.Allerdings ist es zweckmässig, die Umformung

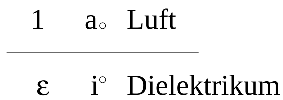


$$-\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\epsilon = \frac{1}{8\pi}D^2\operatorname{grad}(\frac{1}{\epsilon}) \tag{8.25}$$

zu verwenden.

Hydrostatischer Druckunterschied an einer Grenzfläche

Durch Integration durch die Grenzfläche vom Dielektrikum zur Luft erhält man



$$0 = \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{a}} \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{grad}(-P_0 + \frac{1}{8\pi}\rho_{\mathrm{m}}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}})\cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\int E_{\mathrm{t}}^2\operatorname{grad}\epsilon\cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int D_{\mathrm{n}}^2\operatorname{grad}(\frac{1}{\epsilon})\cdot d\mathbf{r}. \tag{8.26}$$

Daraus folgt der hydrostatische Druckunterschied auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$P_{0,\mathrm{i}}(\rho_{\mathrm{m}}) - P_{0,\mathrm{a}} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho_{\mathrm{m}}\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}E^2 - (\epsilon-1)E_{\mathrm{t}}^2 + (\frac{1}{\epsilon}-1)D_{\mathrm{n}}^2\right) \tag{8.27}$$

Druckverlauf im praktisch inkompressiblen Dielektrikum
Aus

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathrm{grav}} = -\operatorname{grad}(P_0(\rho_{\mathrm{m}})) + \rho_{\mathrm{m}}\operatorname{grad}(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}}) - \rho_{\mathrm{m}}\operatorname{grad}(gz) = \mathbf{0}. \tag{8.28}$$

erhält man für annähernd konstantes ρ_{m}

$$P_0 = \rho_{\mathrm{m}}(\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\epsilon}{d\rho_{\mathrm{m}}} - gz) + \mathrm{const.} \tag{8.29}$$

8.c Maxwellscher Spannungstensor

Wir wollen nun die Kraftdichte $\mathbf{k}$ als Divergenz eines Tensors darstellen,

$$k_\alpha = \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}. \tag{8.30}$$

Hat man eine derartige Darstellung, so ist die auf ein Volumen V wirkende Kraft gegeben durch

$$\mathbf{K} = \int_V d^3r\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \int d^3r\mathbf{e}_\alpha \nabla_\beta T_{\alpha,\beta} = \int_{\partial V} df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}). \tag{8.31}$$

Die auf das Volumen wirkende Kraft wird also dargestellt durch eine auf die Oberfläche wirkende Kraft. Wäre sie isotrop $T_{\alpha,\beta} = -P\delta_{\alpha,\beta}$, so würden wir von einem Druck sprechen, der auf die Oberfläche einwirkt. Im hier vorliegenden allgemeineren Fall spricht man von einem Spannungstensor T, da der Druck anisotrop sein kann und Scherspannungen auftreten können.
Zur Berechnung von T gehen wir aus von

$$k_\alpha = \rho_\mathrm{f} E_\alpha - \rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right). \tag{8.32}$$

Wir formen um

$$\rho_\mathrm{f} E_\alpha = \frac{1}{4\pi} E_\alpha \nabla_\beta D_\beta = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla_\beta(E_\alpha D_\beta) - (\nabla_\beta E_\alpha) D_\beta\right) \tag{8.33}$$

und verwenden $\nabla_\beta E_\alpha = \nabla_\alpha E_\beta$ wegen $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Damit folgt

$$k_\alpha = \nabla_\beta(\frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta) - \rho_\mathrm{m} \nabla_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta. \tag{8.34}$$

Nun ist aber

$$\nabla_\alpha \left(u - \rho_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right) = -\rho_\mathrm{m}\nabla_\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi} D_\beta \nabla_\alpha E_\beta, \tag{8.35}$$

da $\partial u/\partial D_\beta = E_\beta/(4\pi)$. Damit folgt der Ausdruck für den Spannungstensor

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(u - \rho_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right). \tag{8.36}$$

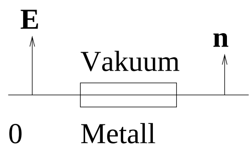
Speziell mit $u = u_0(\rho_\mathrm{m}) + D^2/(8\pi\epsilon(\rho_\mathrm{m}))$, (8.6) folgt

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha D_\beta + \delta_{\alpha,\beta}\left(-P_0(\rho_\mathrm{m}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{8\pi}E^2\rho_\mathrm{m}\frac{d\epsilon}{d\rho_\mathrm{m}}\right). \tag{8.37}$$

Im Vakuum ergibt sich der Maxwellsche Spannungstensor zu

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{1}{4\pi} E_\alpha E_\beta - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi} E^2. \tag{8.38}$$

Als Beispiel betrachten wir die elektrostatische Kraft auf ein ebenes Stück Metall der Fläche F. Wir haben auszuwerten



$$\mathbf{K} = \int df_\beta(\mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}) = \left(\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n}) - \frac{1}{8\pi}\mathbf{n}E^2\right) F = \frac{1}{8\pi}E^2\mathbf{n}F. \tag{8.39}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (7.8).

C Magnetostatik

In diesem Kapitel behandeln wir die Magnetostatik ausgehend von den Gleichungen, die für zeitunabhängige Ströme am Anfang des Abschnittes (3.a) hergeleitet wurden.

9 Magnetische Induktion und Vektorpotential

9.a Amperegesetz

Aus

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.1}$$

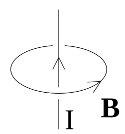
folgt

$$\int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{9.2}$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes (B.56)

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} I \tag{9.3}$$

geschrieben werden kann. Das Linienintegral der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ über eine geschlossene Kurve ergibt das $4\pi/c$ fache des Stromes I durch die Kurve.Dabei gilt die Korkenzieher-Regel: Der Strom ist in die Richtung zu messen, in die sich der Korkenzieher bei Drehung in die Richtung des Linienintegrals bewegt.



9.b Magnetischer Fluss

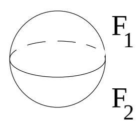
Als magnetischen Fluss Ψ^{m} durch eine gerichtete Fläche F bezeichnet man das Integral

$$\Psi^{\mathrm{m}} = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{9.4}$$

Der magnetische Fluss hängt nur von der Berandung ∂F der Fläche ab. Zum Beweis bilden wir die Differenz des Flusses durch zwei Flächen F_1 und F_2 mit der gleichen Berandung und erhalten

$$\Psi_1^{\mathrm{m}} - \Psi_2^{\mathrm{m}} = \int_{F_1} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \int_{F_2} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9.5}$$

mit Hilfe des Gaußschen Satzes (B.59) und $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.Dabei seien F_1 und F_2 in die gleiche Richtung (zum Beispiel nach oben) orientiert. Die geschlossene Fläche F setzt sich aus F_1 und F_2 zusammen, wobei F_2 jetzt in der umgekehrten Richtung orientiert sei.Dann hat F eine bestimmte Orientierung (zum Beispiel nach außen) und schließt das Volumen V ein.



9.c Feld einer Stromverteilung

Aus $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (4\pi/\mathrm{c})\operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r})$ folgt wegen (B.26)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{9.6}$$

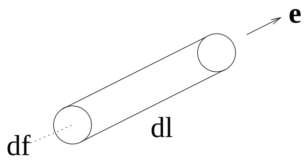
und $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

$$\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{9.7}$$

mit der Lösung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{rot}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (B.63) verwendet haben. Der letzte Ausdruck wird als das Gesetz von Biot und Savart bezeichnet.Ist die Ausdehnung eines Drahtes senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Stromfaden), so kann man $d^3r'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = df'dl'j(\mathbf{r}')\mathbf{e} = Id\mathbf{r}'$ approximieren und erhält



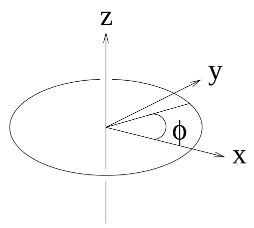
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times d\mathbf{r}' \tag{9.9}$$

Als Beispiel betrachten wir die Induktion in der Mittelachse eines Kreisstromes

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = (R\cos\phi, R\sin\phi, z') \quad d\mathbf{r}' = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)d\phi \tag{9.10}$$

$$(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\times d\mathbf{r}' = (R(z-z')\cos\phi, R(z-z')\sin\phi, R^2)d\phi \tag{9.11}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{2\pi IR^2\mathbf{e}_z}{\mathrm{c}(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}. \tag{9.12}$$



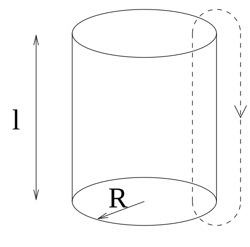
Davon ausgehend berechnen wir das Feld in der Mittelachse einer Spule. Sie habe N Windungen und reiche von $z' = -l/2$ bis $z' = +l/2$. Wir erhalten dann

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2}\frac{Ndz'}{l}\frac{2\pi IR^2\mathbf{e}_z}{\mathrm{c}(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z\left(\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}-z)^2}} + \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}+z)^2}}\right). \tag{9.13}$$

Ist die Spule lang, $R \ll l$, dann kann man für hinreichend große Entfernung vom Spulenende das R^2 im Nenner vernachlässigen und erhält für das Innere der Spule

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi IN}{cl}\mathbf{e}_z. \tag{9.14}$$

An den Spulenenden ist das Feld auf die Hälfte des Wertes im Inneren abgefallen. Aus dem Ampereschen Gesetz folgt bei Integration längs des in der Figur angegebenen Weges



$$\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}IN. \tag{9.15}$$

Daher gilt im Innern näherungsweise der in (9.14) bestimmte Wert, während außerhalb die magnetische Induktion klein dagegen ist.

9.d Vektorpotential

Wir formen den Ausdruck für die magnetische Induktion um

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \big(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{9.16}$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.17}$$

Man bezeichnet $\mathbf{A}$ als das Vektorpotential. Wir zeigen noch, dass $\mathbf{A}$ divergenzfrei ist

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen haben wir partiell integriert (B.62). Am Schluss haben wir $\mathrm{div}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ verwendet.

9.e Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Wir betrachten noch die Kraft zwischen zwei Stromkreisen. Die Kraft, die der Stromkreis (1) auf den Stromkreis (2) ausübt, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r d^3r' \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \times \left(\big(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big) \times \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r d^3r' \big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r d^3r' \Big(\big(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \Big) \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{9.19}$$

unter Verwendung von (B.14). Da wegen (B.62)

$$\int d^3r \big(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\big) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -\int d^3r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \tag{9.20}$$

und $\mathrm{div}\,\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = 0$, folgt schließlich für die Kraft

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r d^3r' \big(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r})\big) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.21}$$

Die auf den ersten Stromkreis wirkende Kraft erhält man durch Austauschen von 1 und 2. Gleichzeitig kann man $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ austauschen. Man sieht dann, dass

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2 \tag{9.22}$$

gilt.

10 Ringströme als magnetische Dipole

10.a Lokalisierte Stromverteilung und magnetischer Dipol

Wir betrachten eine Stromverteilung, die außerhalb einer Kugel vom Radius R verschwindet ($\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ für $r' > R$) und fragen nach der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $r > R$. Wir können dann das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (9.17) ähnlich wie das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in Abschnitt (4) entwickeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{cr} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_\alpha}{cr^3} \int d^3r' x'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}') + ... \tag{10.1}$$

Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt

$$0 = \int d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \operatorname{div}(g(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int d^3r \operatorname{grad} g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{10.2}$$

wobei die Integrale über die Oberfläche beziehungsweise das Volumen der Kugel erstreckt werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12,3.1) folgt also

$$\int d^3r \operatorname{grad} g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.3}$$

Dies verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (10.1) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha$ folgt

$$\int d^3r j_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \tag{10.4}$$

Damit fällt der erste Term der Entwicklung weg. Es gibt keinen mit $1/r$ abfallenden Beitrag im Vektorpotential für die Magnetostatik, das heißt keinen magnetischen Monopol. Mit $g(\mathbf{r}) = x_\alpha x_\beta$ folgt

$$\int d^3r \big(x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) + x_\beta j_\alpha(\mathbf{r})\big) = 0. \tag{10.5}$$

Damit können wir umformen

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) + \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha). \tag{10.6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie wir gerade gesehen haben. Das erste ändert sein Vorzeichen bei Austausch der Indices α und β. Man führt ein

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta = \frac{1}{2} \int d^3r (x_\alpha j_\beta - x_\beta j_\alpha) = \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \tag{10.7}$$

und bezeichnet den sich daraus ergebenden Vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}} \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \tag{10.8}$$

als das magnetische Dipolmoment. Damit folgt dann

$$A_\beta(\mathbf{r}) = \frac{x_\alpha}{cr^3} \mathrm{c}\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma + ... \tag{10.9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + ... \tag{10.10}$$

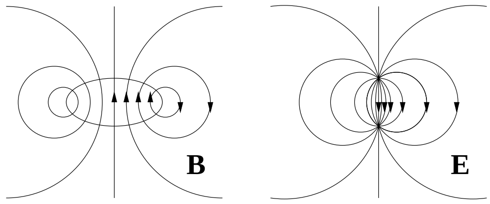
Mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5} + ... \tag{10.11}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols (4.12)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Big(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\Big) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}, \tag{10.12}$$

aber es besteht ein Unterschied am Ort des Dipols. Anschaulich entnimmt man das der nebenstehenden Figur. Man berechne den $\delta^3(\mathbf{r})$-Beitrag zu den beiden Dipolmomenten. Vergleiche (B.71).



10.b Magnetisches Dipolmoment eines Ringstroms

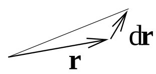
Für das Dipolmoment eines Stromes auf einer geschlossenen Kurve erhält man

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2\mathrm{c}}\int \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \frac{I}{\mathrm{c}}\mathbf{f}, \tag{10.13}$$

zum Beispiel

$$m_z = \frac{I}{2\mathrm{c}}\int (xdy - ydx) = \frac{I}{\mathrm{c}}f_z. \tag{10.14}$$

Dabei ist f_α die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die von den beiden anderen Achsen aufgespannte Ebene



$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{r}. \tag{10.15}$$

Falls $\mathbf{j} = \sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$, dann folgt für das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\mathrm{c}}\sum_i q_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i\mathrm{c}}\mathbf{l}_i, \tag{10.16}$$

wobei m_i für die Masse und $\mathbf{l}_i$ für den Drehimpuls steht. Haben wir es mit einer Sorte Ladungsträger zu tun, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}\mathbf{l}. \tag{10.17}$$

Dies gilt für Orbitalströme. Für Spins hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc}g\mathbf{s}, \tag{10.18}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Drehimpuls des Spins ist. Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g = 2.0023$ und die Komponenten des Spins $\mathbf{s}$ nehmen die Werte $\pm\hbar/2$ an. Da der Bahndrehimpuls quantenmechanisch ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ annimmt, führt man als Einheit des magnetischen Moments des Elektrons das Bohrsche Magneton ein, $\mu_B = \frac{\mathrm{e}_0\hbar}{2\mathrm{m}_0\mathrm{c}} = 0.927\cdot 10^{-20}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^2$.

10.c Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im äußeren magnetischen Feld

10.c.α Kraft

Eine äußere magnetische Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ übt auf einen Ringstrom die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{B}_\mathrm{a}(0)\times\int d^3r\mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\int d^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\beta - \ldots = -\frac{\partial\mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha}\times\mathbf{e}_\beta\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}m_\gamma \tag{10.19}$$

aus. Wir formen $m_\gamma \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta = m_\gamma \mathbf{e}_\gamma \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha$ um und finden

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{m}. \tag{10.20}$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir $(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{a}}{\partial x_\alpha})\mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\gamma}}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_\alpha = m_\gamma \frac{\partial B_{\mathrm{a},\alpha}}{\partial x_\gamma} \mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}_\mathrm{a}$, wobei wir $\operatorname{rot} \mathbf{B}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$ in der Gegend des Dipols verwendet haben. Daher bleibt

$$\mathbf{K} = (\mathbf{m} \operatorname{grad})\mathbf{B}_\mathrm{a} \tag{10.21}$$

als Kraft auf den magnetischen Dipol in Analogie zu (4.35), wo wir als Kraft auf den elektrischen Dipol $(\mathbf{p} \operatorname{grad})\mathbf{E}_\mathrm{a}$ erhielten.

10.c.β Drehmoment

Das mechanische Drehmoment auf den magnetischen Dipol ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_\mathrm{a}) = -\frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{B}_\mathrm{a} \int d^3r (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) + \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r (\mathbf{B}_\mathrm{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{j}. \tag{10.22}$$

Das erste Integral verschwindet, was man mit (10.3) und $g = r^2/2$ leicht sieht. Das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{e}_\beta B_{\mathrm{a},\alpha} \int d^3r x_\alpha j_\beta = B_{\mathrm{a},\alpha} \mathbf{e}_\beta \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_\mathrm{a}. \tag{10.23}$$

Analog war das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_\mathrm{a}$, (4.36).
Aus dem Kraftgesetz schließt man auf die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feldes zu

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_\mathrm{a}. \tag{10.24}$$

Das ist korrekt für permanente magnetische Dipole. Aber das genaue Zustandekommen dieses Ausdrucks wird erst bei Behandlung des Induktionsgesetzes klar (Abschnitt 13).

11 Magnetismus in Materie

Ähnlich wie wir die Polarisationsladungen in der Elektrostatik von den freibeweglichen Ladungen separiert haben, zerlegen wir die Stromdichte in eine freibewegliche Ladungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{f}$ und in die Magnetisierungsstromdichte $\mathbf{j}_\mathrm{M}$, die etwa von Orbitalströmen der Elektronen herrührt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}). \tag{11.1}$$

Wir führen dazu die Magnetisierung als magnetische Dipoldichte ein

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \tag{11.2}$$

und führen wieder den Grenzübergang zum Kontinuum durch

$$\sum_i \mathbf{m}_i f(\mathbf{r}_i) \to \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{11.3}$$

Dann erhalten wir für das Vektorpotential unter Verwendung von (10.10)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{11.4}$$

Das zweite Integral lässt sich umformen in

$$\int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \tag{11.5}$$

so dass man

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}') + \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')) \tag{11.6}$$

erhält. Es liegt nahe, $\mathbf{j}_\mathrm{M}(\mathbf{r}') = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,'\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ als Magnetisierungsstromdichte zu interpretieren. Damit folgt dann für die magnetische Induktion

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) + 4\pi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{11.7}$$

Man führt nun die magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) := \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{11.8}$$

ein, für die dann die Maxwellgleichung

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \tag{11.9}$$

gilt. An der anderen Maxwellgleichung $\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ändert sich dadurch nichts.
Für para- und diamagnetische Substanzen ist für nicht zu große Feldstärken

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m} \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}, \tag{11.10}$$

wobei χ_m als magnetische Suszeptibilität und μ als relative Permeabilität bezeichnet werden. Im Supraleiter erster Art ist $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (vollständiger Diamagnetismus). Die magnetische Induktion wird dort durch Oberflächenströme vollständig aus dem Material verdrängt.
Als Randbedingungen folgt analog zur Argumentation für die dielektrische Verschiebung und die elektrische Feldstärke die Stetigkeit der Normalkomponente B_n und bei Abwesenheit von Leitungsströmen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten $\mathbf{H}_\mathrm{t}$.
Im Gaußschen Maßsystem werden $\mathbf{M}$ und $\mathbf{H}$ genau so wie $\mathbf{B}$ in $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$ gemessen, während im SI-System $\mathbf{B}$ in $\mathrm{Vs/m}^2$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in $\mathrm{A/m}$ gemessen werden. Dabei bestehen für $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ Umrechnungsfaktoren, die sich durch einen Faktor 4π unterscheiden. Genaueres siehe Anhang A.

D Induktionsgesetz

12 Faradaysches Induktionsgesetz

Die Kraft auf Ladungsträger ist $q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. Dabei ist es für die Ladungsträger einerlei, ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Feld herrührt. Sie spüren also in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine effektive Feldstärke

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}} \times \mathbf{B} \tag{12.1}$$

mit $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$. Die längs einer Leiterschleife induzierte Spannung beträgt daher

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \oint (\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}. \tag{12.2}$$

Das erste Integral ergibt einen Beitrag auf Grund der Magnetfeldveränderung. Für eine raumfeste Leiterschleife und veränderliches $\mathbf{B}$ folgt (da $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$)

$$V^{(\mathrm{ind})} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\left.\frac{d\Psi^{\mathrm{m}}}{dt}\right|_{\text{Schleife fest}}. \tag{12.3}$$

Das zweite Integral in (12.2) bringt einen Beitrag auf Grund der Bewegung der Leiterschleife. Um eine Leiterschleife zu untersuchen, die sich bewegt (und verbiegt), verwenden wir eine Parameterdarstellung der Leiterschleife $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,p)$ mit dem körperfesten Parameter p. Für festes t gilt dann $d\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r}/\partial p)dp$ und

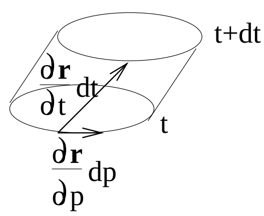
$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \lambda(p,t)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} \tag{12.4}$$

mit einem $\lambda = dp/dt$, das von der Bewegung der Ladungen auf dem Leiter abhängt. Es folgt dann

$$dt\oint (\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int (\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p})\cdot\mathbf{B}\,dp\,dt = -\frac{1}{\mathrm{c}}\int d\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}, \tag{12.5}$$

da $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\,dp\,dt$ gerade das Flächenelement ist, das in der Zeit dt vom Leiterelement dp überstrichen wird. Wir finden daher

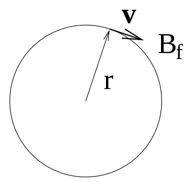
$$\oint (\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\left.\frac{d\Psi^m}{dt}\right|_{\mathbf{B}_{\text{fest}}}. \tag{12.6}$$



Die gesamte induzierte Spannung setzt sich aus der Änderung des Magnetflusses durch Änderung der magnetischen Induktion (12.3) und der Änderung der Leiterschleife (12.6) zusammen

$$V^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{d\Psi^{\mathrm{m}}}{dt}, \tag{12.7}$$

ist also durch die totale Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife gegeben. Es ist für einen Generator gleichgültig, ob das erzeugende magnetische Feld rotiert oder die Spule, in der die Spannung induziert wird.



Das Betatron (nicht relativistisch) Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn und werden auf dieser durch die Lorentz-Kraft, die vom Führungsfeld B_f ausgeht, gehalten. Dann müssen sich Zentrifugal-Kraft und Lorentz-Kraft kompensieren

$$\frac{mv^2}{r} = \mathrm{e}_0 \frac{v}{\mathrm{c}} B_\mathrm{f} \quad \to \quad mv = \frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{c}} B_\mathrm{f} r. \tag{12.8}$$

Beschleunigt werden die Elektronen durch die Induktion

$$\frac{d}{dt}(mv) = -\mathrm{e}_0 E = \frac{\mathrm{e}_0}{2\pi r} \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathrm{c}} \int B df = \frac{\mathrm{e}_0}{2\pi r c} r^2 \pi \frac{d\bar{B}}{dt}. \tag{12.9}$$

Dabei ist $\bar{B}$ die mittlere magnetische Induktion innerhalb des Kreises. Man hat also

$$mv = \frac{\mathrm{e}_0}{2} \bar{B} \frac{r}{c} = \frac{\mathrm{e}_0}{c} B_\mathrm{f} r, \tag{12.10}$$

woraus die Wideröesche Bedingung $B_\mathrm{f} = \bar{B}/2$ folgt.

13 Induktivitäten und Stromkreise

13.a Induktivitäten

Der magnetische Fluss durch eine Spule beziehungsweise den Stromkreis $\#j$ ist gegeben durch

$$\Psi_j^{\mathrm{m}} = \int d\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{f}_j \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \oint d\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \tag{13.1}$$

Mehrere Stromkreise erzeugen das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{I_k}{\mathrm{c}} \oint \frac{d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.2}$$

Daher lässt sich der magnetische Fluss ausdrücken durch

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \Psi_j^{\mathrm{m}} = \sum_k L_{j,k} I_k \tag{13.3}$$

mit

$$L_{j,k} = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \tag{13.4}$$

Es gilt daher $L_{j,k} = L_{k,j}$. Ist $j \neq k$, so spricht man von Gegeninduktivitäten, bei $j = k$ von Selbstinduktivitäten. Bei der Berechnung der Selbstinduktivitäten nach (13.4) tritt eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt nicht berücksichtigt. Bei einem Drahtradius r_0 muss man $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| < r_0/(2\mathrm{e}^{1/4})$ ausschließen (vgl. Becker-Sauter), falls der Strom gleichmäßig über den kreisförmigen Querschnitt verteilt ist.
Die Dimension der Induktivitäten ergibt sich zu s^2/cm. Die Umrechnung in das SI-System ist gegeben durch $1\mathrm{s}^2/\mathrm{cm} \,\hat{=}\, 9 \cdot 10^{11}\mathrm{Vs/A} = 9 \cdot 10^{11}$ H (Henry).
Sind die Bereiche des wesentlichen magnetischen Flusses mit einem Material der Permeabilität μ ausgefüllt, so folgt aus $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$ der Zusammenhang $\operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = 4\pi \mathbf{j}_{\mathrm{f}}/\mathrm{c}$, so dass

$$L_{j,k}^{\mathrm{Mat}} = \mu L_{j,k}^{\mathrm{Vak}}. \tag{13.5}$$

Man erhält also hohe Induktivitäten durch Kerne hoher Permeabilität $\mu \approx 10^3 ... 10^4$ im Joch.
Induktivität einer langen Spule Ist ein geschlossenes magnetisches Joch der Länge l und des Querschnitts f mit N Drahtwindungen umwickelt, die ein Strom I durchfliesst, so folgt aus dem Ampereschen Gesetz $Hl = 4\pi IN/\mathrm{c}$ und daraus die magnetische Induktion $B = 4\pi IN\mu/(\mathrm{c}l)$. Der magnetische Fluss lässt sich dann $Bf = \mathrm{c}L_0 NI$ mit $L_0 = 4\pi\mu f/\mathrm{c}^2 l$ schreiben. Für N Windungen ist der magnetische Fluss mit N zu multiplizieren, was auf die Selbstinduktion $L = L_0 N^2$ führt. Für die Gegeninduktivität zwischen zwei Schleifen mit N_1 und N_2 Windungen ergibt sich dann $L_{1,2} = L_0 N_1 N_2$. Es gilt dann also generell

$$L_{i,j} = L_0 N_i N_j, \quad L_0 = \frac{4\pi\mu f}{\mathrm{c}^2 l}. \tag{13.6}$$

13.b Stromkreis-Elemente

Wir wollen nun Stromkreise betrachten, die folgende Elemente enthalten: Spannungsquellen, Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Während wir Induktivitäten und Kapazitäten bereits eingeführt haben, ist noch kurz etwas zu den beiden anderen Elementen zu sagen:
Spannungsquellen Eine Spannungsquelle habe eine Spannung oder elektromotorische Kraft $V^{(\mathrm{e})}(t)$. Sie führt dem System die Leistung $V^{(\mathrm{e})} I$ zu. Ein Beispiel stellt eine Batterie dar, die chemische Energie in elektromagnetische umwandelt. Auch die Spannungen $V^{(\mathrm{ind})}$ der Induktivitäten zählt man zu den elektromotorischen Kräften.

Ohmsche Widerstände Für viele Materialien ist bei nicht zu großen elektrischen Feldstärken die Stromdichte der Feldstärke proportional. Der Proportionalitätskoeffizient σ heißt Leitfähigkeit

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{13.7}$$

Für einen Draht der Länge l und des Querschnitts f folgt

$$I = jf = \sigma f E = \sigma \frac{f}{l} V^{(\mathrm{R})}. \tag{13.8}$$

Dabei ist $V^{(\mathrm{R})}$ der Ohmsche Spannungsabfall längs des Leiters. Man hat also das Gesetz

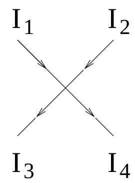
$$V^{(\mathrm{R})} = RI, \quad R = \frac{l}{\sigma f} \tag{13.9}$$

mit dem Ohmschen Widerstand R. Im Gaußschen Maßsystem wird die Leitfähigkeit σ in 1/s und der Widerstand R in s/cm gemessen. Die Umrechnung in das SI-System erfolgt durch $\mathrm{c}^{-1} \widehat{=} 30\Omega$. In einem Ohmschen Widerstand wird pro Zeiteinheit $V^{(\mathrm{R})} I$ an elektromagnetischer Energie in Wärme umgewandelt.

13.c Kirchhoffsche Regeln

1. Kirchhoffsche Regel (Knotenpunktsgesetz für die Ströme)

Das erste Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass an jedem Knoten, an dem mehrere Leiter enden, die Summe der einlaufenden Ströme gleich der der auslaufenden ist

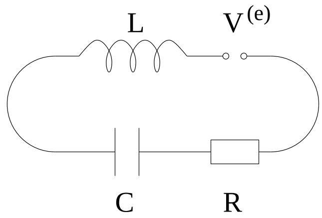


$$\sum I_{\text{einlaufend}} = \sum I_{\text{auslaufend}}. \tag{13.10}$$

Diese Regel stellt also die makroskopische Form von $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ dar. Im nebenstehenden Fall beinhaltet sie $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

2. Kirchhoffsche Regel (Maschengesetz für die Spannungen)

Diese Regel besagt, dass längs eines Maschenumlaufs die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der übrigen Spannungsabfälle ist



$$\sum \left(V^{(\mathrm{e})} + V^{(\mathrm{ind})} \right) = \sum \left(V^{(\mathrm{R})} + V^{(\mathrm{C})} \right), \tag{13.11}$$

wobei

$$V^{(\mathrm{ind})} = -d(LI)/dt, \quad V^{(\mathrm{C})} = q/C, \quad dV^{(\mathrm{C})}/dt = I/C. \tag{13.12}$$

Diese Regel ist also das Faradaysche Induktionsgesetz in makroskopischer Form.

13.d Energie von Induktivitäten

Um die Energie von Induktivitäten zu bestimmen, betrachten wir Stromkreise mit eingeprägten Spannungen, ohmschen Widerständen und induktiven Kopplungen

$$V_j^{(\mathrm{e})} + V_j^{(\mathrm{ind})} = R_j I_j. \tag{13.13}$$

Die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems ergibt sich dann zu

$$\dot{U}_{\mathrm{em}} = \sum_j I_j V_j^{(\mathrm{e})} - \sum_j R_j I_j^2 + L_{\mathrm{mech}} = -\sum_j I_j V_j^{(\mathrm{ind})} + L_{\mathrm{mech}} \tag{13.14}$$

mit

$$V_j^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\Psi}_j^{\mathrm{m}} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_k L_{j,k} I_k \right). \tag{13.15}$$

Dabei ist L_{mech} die an dem System verrichtete mechanische Leistung.
Wir betrachten nun mehrere Fälle:

13.d.α Konstante Induktivitäten

Wir halten die Stromkreise fest, dann gilt $L_{j,k} = \text{const}$, $L_{\text{mech}} = 0$. Dann folgt

$$\dot{U}_{\text{em}} = \sum_{j,k} I_j L_{j,k} \dot{I}_k, \tag{13.16}$$

woraus sich die Energie der Induktivitäten zu

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_j L_{j,k} I_k \tag{13.17}$$

ergibt.

13.d.β Gegeneinander bewegte Stromkreise

Wir bewegen nun die Stromkreise gegeneinander. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{\text{mech}} &= \dot{U}_{\text{em}} + \sum_j I_j V_j^{(\text{ind})} = \sum_{j,k} (I_j L_{j,k} \dot{I}_k + \frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k) - \sum_{j,k} (I_j \dot{L}_{j,k} I_k + I_j L_{j,k} \dot{I}_k) \\ &= -\frac{1}{2} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = -\left. \frac{\partial U_{\text{em}}}{\partial t} \right|_I . \end{aligned} \tag{13.18}$$

Die mechanische Arbeit, die zu verrichten ist, wird also nicht durch die Veränderung der elektromagnetischen Energie U_{em} bei konstanten Strömen I gegeben, sondern durch ihr Negatives.

13.d.γ Konstante magnetische Flüsse

Falls wir keine eingeprägten Spannungen $V_j^{(\text{e})} = 0$ haben und keine Widerstände $R_j = 0$, dann gilt nach (13.13) $V^{(\text{ind})} = 0$, woraus folgt, dass die magnetischen Flüsse Ψ_j^{m} unverändert bleiben. Die Induktion ist also bestrebt, die Magnetflüsse aufrecht zu erhalten (Beispiel supraleitende Ringströme). Drücken wir U_{em} durch die Flüsse aus,

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2\text{c}^2} \sum_{j,k} \Psi_j^{\text{m}} (L^{-1})_{j,k} \Psi_k^{\text{m}}, \tag{13.19}$$

so folgt mit der Matrix-Identität $\dot{L}^{-1} = -L^{-1} \dot{L} L^{-1}$ (die Identität erhält man durch Ableiten von $LL^{-1} = 1$ und Auflösen nach $\dot{L}^{-1}$)

$$\left. \frac{\partial U_{\text{em}}}{\partial t} \right|_{\Psi^{\text{m}}} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} I_j \dot{L}_{j,k} I_k = L_{\text{mech}}. \tag{13.20}$$

Die mechanische Leistung ist daher die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energie bei konstanten magnetischen Flüssen.

13.d.δ Kraft zwischen zwei Stromkreisen

Nach diesen Betrachtungen kommen wir auf die Kraft zwischen zwei Stromkreisen zurück. Wir hatten im Abschnitt (9.e) die Kraft des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 zu (9.21)

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{\text{c}^2} \int d^3 r d^3 r' (\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r})) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{13.21}$$

berechnet. Gehen wir nun zu zwei Stromfäden über

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \tag{13.22}$$

$$d^3 r' \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \to d\mathbf{r}_1 I_1, \qquad d^3 r \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \to d\mathbf{r}_2 I_2, \tag{13.23}$$

so folgt

$$\mathbf{K}_2 = \frac{I_1 I_2}{\mathrm{c}^2} \int (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{a} - \mathbf{r}_1|} = I_1 I_2 \nabla_a L_{1,2}(\mathbf{a}). \tag{13.24}$$

Daher ist

$$L_{\mathrm{mech}} = -\mathbf{K}_2 \cdot \dot{\mathbf{a}} = -I_1 I_2 \dot{L}_{1,2} \tag{13.25}$$

in Übereinstimmung mit (13.18).

13.d.ϵ Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld

Wir können andererseits die Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols erzeugt durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}_\mathrm{a}$ erzeugt durch eine Stromverteilung $\mathbf{j}_\mathrm{a}$ jetzt schreiben als

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r d^3r' (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_\mathrm{a}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{A}_\mathrm{a}(0) + x_\alpha \nabla_\alpha \mathbf{A}_\mathrm{a}|_{r=0} + ...) = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r x_\alpha j_\beta \nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} \\ &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} m_\gamma \nabla_\alpha A_{\mathrm{a},\beta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_\mathrm{a}. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Dies ist jetzt der korrekte Ausdruck für die Energie eines magnetischen Dipols $\mathbf{m}$ in einer äußeren magnetischen Induktion $\mathbf{B}_\mathrm{a}$.

13.d.ζ Permanente magnetische Momente

Permanente magnetische Momente kann man als Stromkreise mit sehr großer Selbstinduktivität $L_{j,j}$ und konstantem Fluss Ψ^m_j auffassen. Zur weiteren Berechnung lösen wir (13.3) nach I_j auf

$$I_j = \frac{\Psi^\mathrm{m}_j}{\mathrm{c} L_{j,j}} - \sum_{k \neq j} \frac{L_{j,k} I_k}{L_{j,j}}. \tag{13.27}$$

Bei Verschiebung der magnetischen Momente verändern sich die Gegeninduktivitäten und man erhält

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{L_{j,j}} \big(\sum_{k \neq j} \dot{L}_{j,k} I_k + \sum_{k \neq j} L_{j,k} \dot{I}_k \big). \tag{13.28}$$

Falls die Selbstinduktivitäten $L_{j,j}$ sehr groß gegen die Gegeninduktivitäten sind, ändern sich die Ströme nur wenig und die zweite Summe ist vernachlässigbar. Dann erhält man für den Selbst-Induktions-Beitrag aus der Energie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_{j,j} I_j^2 \right) = L_{j,j} I_j \dot{I}_j = -I_j \sum_{k \neq j} \dot{L}_{j,k} I_k. \tag{13.29}$$

Daher erhält man durch eine Änderung von $L_{j,k}$ den Beitrag $\dot{L}_{j,k} I_j I_k$ direkt aus der Wechselwirkung zwischen den Strömen I_j und I_k, die einen Beitrag der Form (13.26) zu U_em liefern und zwei Beiträge mit dem umgekehrten Vorzeichen aus $\frac{1}{2} L_{j,j} I_j^2$ und $\frac{1}{2} L_{k,k} I_k^2$. Dies erklärt den Unterschied zwischen (10.24) und (13.26).

E Maxwell-Gleichungen

14 Vollständige Maxwell-Gleichungen

14.a Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen

Im Abschnitt (1) haben wir die vier Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{14.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho(\mathbf{r},t) \tag{14.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{c\partial t} = \mathbf{0} \tag{14.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{14.4}$$

angegeben. Es sind dies acht Komponentengleichungen für die insgesamt sechs Komponenten B_α und E_α. Die Gleichungen können daher nicht unabhängig voneinander sein. In der Tat bilden wir die Divergenz der ersten Gleichung und vergleichen mit der zweiten Gleichung, so finden wir

$$-\frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{E} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c}\dot{\rho}, \tag{14.5}$$

woraus wir sehen, dass in diesen beiden Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (1.12) enthalten ist, und diese auch nur erfüllt werden können, wenn die Ladung erhalten ist. Zum anderen folgt daraus aber auch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \tag{14.6}$$

Wenn also zu einer Zeit die Gleichung (14.2) und zu allen Zeiten die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt sind, so garantiert (14.1) dafür, dass (14.6) zu allen Zeiten erfüllt ist.
Ähnlich folgt aus der Divergenz von (14.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) = 0. \tag{14.7}$$

Wenn also (14.4) zu einer Zeit erfüllt ist, so ist sie auf Grund von (14.3) zu allen Zeiten erfüllt.
Die Gleichungen (14.1) und (14.3) erlauben die Berechnung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$, falls $\mathbf{j}$ zu allen Zeiten gegeben ist und $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ zu einer Zeit t_0 gegeben sind und zu dieser Zeit (14.2) und (14.4) erfüllt sind. ρ ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung.
Der einzige Beitrag, den wir bisher nicht betrachtet haben, ist der Beitrag proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). Er wurde von Maxwell gefunden. Er hat $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ als Verschiebungsstrom bezeichnet, da (14.1) in der Form

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{E}}) \tag{14.8}$$

geschrieben werden kann. Mit der Einführung dieses Terms wurde das Gleichungssystem (14.1-14.4) widerspruchsfrei. Gleichzeitig erlaubt dieses System dann die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme

Die Ladungsdichte und die Stromdichte werden zerlegt (vgl. Abschnitt 6.a und 11)

$$\rho = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{P}} \tag{14.9}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \mathbf{j}_{\mathrm{P}} + \mathbf{j}_{\mathrm{M}}. \tag{14.10}$$

Dabei waren ρ_{f} und $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ die freibeweglichen Anteile, während ρ_{P} und das hier eingeführte $\mathbf{j}_{\mathrm{P}}$ die Polarisations-Anteile sind. Wir hatten für das elektrische Dipolmoment im Volumen ΔV ausgedrückt durch die Dipolmomente $\mathbf{p}_i$, die wieder durch Ladungspaare $\pm q_i$ im Abstand $\mathbf{a}_i$ dargestellt werden

$$\mathbf{P}\Delta V = \sum \mathbf{p}_i = \sum q_i \mathbf{a}_i \tag{14.11}$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}}\Delta V = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum q_i \dot{\mathbf{a}}_i \tag{14.12}$$

mit $\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{P}}$ (in ruhender Materie). Dazu kommt dann noch die in Abschnitt 11 eingeführte Magnetisierungsstromdichte

$$\mathbf{j}_{\mathrm{M}} = \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}. \tag{14.13}$$

Für diese Ladungs- und Stromdichten gilt

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{f}} = 0 \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{P}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{14.15}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{M}} = 0. \tag{14.16}$$

Durch Einsetzen dieser Ladungs- und Stromdichten in (14.1) ergibt sich

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}(\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \dot{\mathbf{P}} + \mathrm{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}), \tag{14.17}$$

woraus

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{\partial}{\mathrm{c}\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}_{\mathrm{f}} \tag{14.18}$$

folgt. Führen wir wieder wie in (11.8) und (6.6) das magnetische Feld $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ein, so wird (11.9) erweitert zu

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}_{\mathrm{f}}. \tag{14.19}$$

Entsprechend folgt aus (14.2) wie in (6.7)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}. \tag{14.20}$$

Die Maxwell-Gleichungen (14.3) und (14.4) bleiben unverändert.

15 Energie- und Impuls-Bilanz

15.a Energie

Wir betrachten ein Volumen eines Systems mit freibeweglichen Ladungen und festgehaltener Materie. Auf die freibeweglichen Ladungen wirkt die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/\mathrm{c})$. Bewegen wir die Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so müssen wir dem System gegen diese Kraftdichte die Leistung $-\int d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E}$ zuführen. Wir formen nun mittels (14.19), (B.30) und (14.3) um

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Diese Beiträge interpretiert man folgendermaßen: In ruhender Materie stellt der zweite Beitrag die zeitliche Änderung der Energiedichte $u(\rho_\mathrm{m}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ dar mit

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho_\mathrm{m}} d\rho_\mathrm{m} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Energie der Materie von ihrer Massendichte ρ_m, aber nicht vom vollständigen Verzerrungszustand abhängt. Wir hatten schon früher gesehen, dass $\partial u/\partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ gilt. Ähnlich kann man aus dem Induktionsgesetz zeigen, dass $\partial u/\partial \mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ für starre Materie gilt. Hier die Herleitung in Kurzform

$$\begin{aligned} \delta U_\mathrm{em} &= -\sum_j V_j^{(\mathrm{ind})} \delta t I_j = \frac{1}{\mathrm{c}} \sum_j I_j \delta \Psi_j^\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{c}} \sum_j I_j \int d\mathbf{f}_j \cdot \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}} \sum_j I_j \int d\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Da die Materie festgehalten wird, trägt $\partial u/\partial \rho_\mathrm{m} \dot{\rho}_\mathrm{m}$ nichts bei. Wir setzen daher für die Energie des Volumens V

$$U(V) = \int_V d^3r\, u(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{15.4}$$

und führen den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{15.5}$$

ein. Es gilt dann

$$-\int_V d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} = \dot{U}(V) + \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{S} = \dot{U}(V) + \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}). \tag{15.6}$$

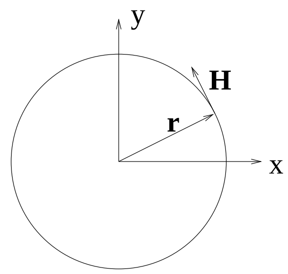
Die dem Volumen V zugeführte Energie wird zum Teil im Volumen gespeichert ($\dot{U}$), zum anderen Teil aber durch die Oberfläche des Systems transportiert. Dieser Energietransport ist durch die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ gegeben. Ähnlich wie durch eine Fläche pro Zeiteinheit die Ladung $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ transportiert wird, wird (in ruhender Materie) die Energie $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ transportiert. Der Poynting-Vektor gibt daher die elektromagnetische Energiestromdichte an.
Wir bemerken, dass für $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$u = u^0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \tag{15.7}$$

folgt.

Beispiel: Stromdurchflossener gerader Leiter

Wir betrachten einen vom Strom I durchflossenen geraden Draht in Richtung der z-Achse. Auf Grund des Ampereschen Gesetzes gilt bei Integration auf einem konzentrischen Kreis mit Radius r um den Leiter



$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I, \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{\mathrm{c}r} \mathbf{e}_\phi. \tag{15.8}$$

Längs des Leiters bestehe auf Grund des ohmschen Widerstandes ein Spannungsabfall $V^{(\mathrm{R})}$, verknüpft mit einem elektrischen Feld parallel zum Draht, $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_\mathrm{z}$. Daraus folgt der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{I E_0 \mathbf{e}_\mathrm{r}}{2\pi r} \tag{15.9}$$

mit einem Energiefluss

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = -I E_0 l = -I V^{(\mathrm{R})} \tag{15.10}$$

durch den Zylindermantel des Drahtes über die Länge l nach außen. Mit anderen Worten, es fließt in den Draht die ohmsche Leistung $IV^{(\mathrm{R})}$. Diese wird im Draht in Wärme umgewandelt.

15.b Impuls-Bilanz

Wir führen die Impuls-Bilanz nur für das Vakuum mit Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\mathbf{j}$ durch. Wir wollen das System in Ruhe halten. Dann müssen wir gegen die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/\mathrm{c}$ eine Gegenkraftdichte $-\mathbf{k}$ wirken lassen, so dass einem Volumen V pro Zeiteinheit der Impuls $-\int_V d^3r\, \mathbf{k}$ zugeführt wird. Wir formen nun wieder mit (14.1) und (14.3) um

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{c}} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

Mit (14.3) und (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^{\cdot} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^{\cdot} + \mathrm{c}\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} & (15.12) \\ \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & (15.13) \end{aligned}$$

folgt

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^{\cdot} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B}). \tag{15.14}$$

Nun ist

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

Wir haben hier Größen, auf die der ∇-Operator nicht wirkt, mit einem Index $_\mathrm{c}$ gekennzeichnet. Im letzten Term des obigen Ausdrucks wirkt der ∇-Operator tatsächlich auf beide Faktoren $\mathbf{E}$. Damit können wir schreiben

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi\mathrm{c}} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, & (15.17) \\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi} (E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi} (E^2 + B^2). & (15.18) \end{aligned}$$

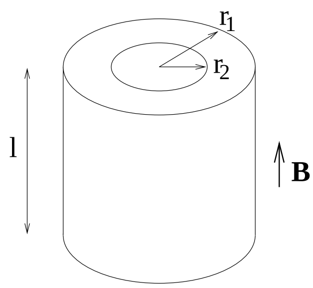
Dabei wird $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ als die Strahlungsimpulsdichte bezeichnet, und $T_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors, dessen elektrostatischen Anteil wir bereits in der Elektrostatik (8.38) kennengelernt haben. Mit diesen Größen gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r\, \mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\, \mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta} df_\beta. \tag{15.19}$$

Dies ist die Impuls-Bilanz für das Volumen V. Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung des Impulses im Volumen V dar, die rechte Seite den zugeführten Impuls. Er besteht aus zwei Anteilen: Der erste ist der Impuls, den wir hinzufügen, indem wir gegen die elektromagnetische Kraftdichte $\mathbf{k}$ eine Gegenkraft wirken lassen. Der zweite Anteil wirkt in Form von Spannungen an der Oberfläche. Man kann ihn auch als Fluss des Impulses betrachten. Der Spannungstensor stellt bis auf das Vorzeichen eine Impulsflussdichte dar. Er trägt zwei Indices. Einer (α) bezieht sich auf die Komponente des Impulses, der andere (β) auf die Richtung des Flusses.
Wir haben hier nur den elektromagnetischen Impuls im Vakuum behandelt, während wir die elektromagnetische Energie auch in Materie untersucht haben. Warum ist es schwieriger, den Impuls in Materie zu behandeln? In beiden Fällen haben wir das System in Ruhe untersucht. Hält man die Materie fest, so tragen die dabei aufgewendeten Kräfte nicht zur Energie-Bilanz bei. Schließlich ist die Leistung als Kraft mal Geschwindigkeit gegeben. Da die Geschwindigkeit der Materie gleich Null ist, trägt die auf die Materie wirkende Kraft nicht zur Energie-Bilanz bei. Anders ist es bei der Impuls-Bilanz. Da tragen alle Kräfte bei. Man könnte daran denken, von einem kräftefreien Zustand auszugehen. Dann tritt allerdings das Problem auf, dass bei Verschiebung der freibeweglichen Ladungen überall in der Materie Kräfte auftreten können, die wir erst kennen müssten. Daher können wir hier die Energie-Bilanz in Materie behandeln, hätten aber mit der Impuls-Bilanz Probleme.
In der Literatur gibt es widersprüchliche Aussagen: Minkowski hat 1908 für den elektromagnetischen Impuls in Materie $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ angegeben. Man findet dies auch im Lehrbuch von Sommerfeld (allerdings mit Einschränkungen). Andererseits gibt Abraham 1910 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$ an. Man findet dies auch im Lehrbuch von Landau und Lifschitz.
Tatsächlich sind zwei Dinge zu beachten, die häufig nicht berücksichtigt werden:
1) Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie muss berücksichtigt werden. Die Materie kann nicht als starr angenommen werden.
2) Man muss genau definieren, was man unter dem elektromagnetischen Impuls versteht, da man sonst alles in den unbekannten Rest mechanischen Impuls schieben kann, also keine Aussage gemacht hat. Ohne Herleitung sei nur angegeben, dass man ein System modellieren kann, dem man entnimmt: Im lokalen Ruhesystem der Materie ist die Impulsdichte $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c) = \mathbf{S}/c^2$. Allerdings kann man zeigen, dass es in homogener Materie eine weitere Erhaltungsgröße auf Grund dieser Homogenität gibt, die im lokalen Ruhesystem den Wert $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ annimmt. Vollzieht man Sommerfelds Argument nach, so stellt man in der Tat fest, daß es sich nur für eine ortsunabhängige Dielektrizitätskonstante ϵ durchführen lässt.

Beispiel: Zylinderkondensator im Magnetfeld

Wir betrachten einen Zylinderkondensator der Länge l mit Außenradius r_1 und Innenradius r_2 mit einer Ladung q außen und $-q$ innen. Zwischen den beiden Zylindern sei Vakuum. Parallel zur Achse sei ein Magnetfeld B_0. Dann haben wir in Zylinderkoordinaten



$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{lr}\mathbf{e}_{\mathrm{r}}, \quad \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\pi c}\frac{2qB_0}{lr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.20}$$

Daraus errechnet sich ein Drehimpuls $\mathbf{L}$ in z-Richtung

$$L_z = \int dz d^2r (\mathbf{r} \times \mathbf{g}_{\mathrm{s}})_z = \int dz d^2r r \frac{2qB_0}{4\pi c l r} = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2). \tag{15.21}$$

Wenn wir den Kondensator nun entladen, dann muss der Entladungsstrom durch das Magnetfeld fließen. Dabei wirkt die Lorentz-Kraft, die dem System ein mechanisches Drehmoment $\mathbf{M}_{\mathrm{mech}}$ gibt

$$\mathbf{M}_{\mathrm{mech}} = \int d^3r\, \mathbf{r} \times (\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{I}{c}\int ((\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})d\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})\mathbf{B}), \tag{15.22}$$

woraus sich

$$M_{\mathrm{mech,z}} = -\frac{IB_0}{c}\int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{IB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.23}$$

und damit der mechanische Drehimpuls

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.24}$$

errechnet. Durch die Entladung wurde also der elektromagnetische Drehimpuls (15.21) in mechanischen (15.24) umgewandelt. Anstatt den Kondensator zu entladen, kann man auch das Magnetfeld abschalten. Dabei wird eine elektrische Feldstärke

$$\oint \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\pi r^2 \dot{B}_0, \quad \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{2c} r \dot{B}_0 \mathbf{e}_\phi \tag{15.25}$$

induziert, die auf die Ladungen ein Drehmoment

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathrm{mech}} &= q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_1) - q\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_2) && (15.26) \\ M_{\mathrm{mech,z}} &= qr_1(-\frac{1}{2c} r_1 \dot{B}_0) - qr_2(-\frac{1}{2c} r_2 \dot{B}_0) && (15.27) \end{aligned}$$

ausübt, so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente

$$L_z = \frac{qB_0}{2c}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.28}$$

erhält. In beiden Fällen wird also der elektromagnetische Drehimpuls in den gleichen mechanischen Drehimpuls umgewandelt.

F Elektromagnetische Wellen

16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren

16.a Wellengleichung

Wir betrachten elektromagnetische Wellen in einem homogenen isotropen Isolator einschließlich dem Vakuum. Das heißt, wir verlangen, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ orts- und zeitunabhängig sind. Wir verlangen weiterhin, dass keine freien Ströme und Ladungen auftreten $\rho_{\rm f} = 0$, $\mathbf{j}_{\rm f} = \mathbf{0}$. Das Material ist also ein Isolator. Damit lauten dann die vier Maxwell-Gleichungen, ausgedrückt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ mit Hilfe von $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\rm c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\rm c}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.2}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\rm c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\epsilon\mu}{{\rm c}^2}\ddot{\mathbf{H}} \tag{16.3}$$

Mit

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\triangle\mathbf{H} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) \tag{16.4}$$

folgt unter Berücksichtigung von (16.1) für $\mathbf{H}$ und analog für $\mathbf{E}$

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{16.5}$$

$$\triangle\mathbf{E} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{E}}, \tag{16.6}$$

$$c' = \frac{\rm c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{16.7}$$

Die Gleichungen (16.5) und (16.6) heißen Wellengleichungen.

16.b Ebene Wellen

Wir suchen nun partikuläre Lösungen der Wellengleichungen und beginnen mit Lösungen, die nur von z und t abhängen, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$. Für die z-Komponenten folgt dann

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad\to\quad \frac{\partial E_{\rm z}}{\partial z} = 0 \tag{16.8}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{\rm z} = 0 = \frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm z} \quad\to\quad \frac{\partial E_{\rm z}}{\partial t} = 0. \tag{16.9}$$

In der z-Richtung ist mit diesem Ansatz also nur ein statisches homogenes Feld, das heißt ein konstantes Feld $E_{\rm z}$ möglich. Entsprechendes gilt auch für $H_{\rm z}$. Wir sehen hieraus bereits, dass elektromagnetische Wellen Transversal-Wellen sind.
Für die x- und die y-Komponenten folgt

$$(\nabla\times\mathbf{H})_{\rm x} = \frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm x} \;\to\; -\nabla_{\rm z}H_{\rm y} = \frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm x} \;\to\; -\nabla_{\rm z}(\sqrt{\mu}H_{\rm y}) = \frac{1}{c'}(\sqrt{\epsilon}E_{\rm x})^{\cdot} \tag{16.10}$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_{\rm y} = -\frac{\mu}{\rm c}\dot{H}_{\rm y} \;\to\; \nabla_{\rm z}E_{\rm x} = -\frac{\mu}{\rm c}\dot{H}_{\rm y} \;\to\; \nabla_{\rm z}(\sqrt{\epsilon}E_{\rm x}) = -\frac{1}{c'}(\sqrt{\mu}H_{\rm y})^{\cdot}. \tag{16.11}$$

E_x ist mit H_y verknüpft, analog E_y mit $-H_\mathrm{x}$. Wir können die beiden Gleichungen (16.10) und (16.11) zusammenfassen zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}) = \mp c' \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}). \tag{16.12}$$

Die Lösung dieser Gleichung und der entsprechenden für E_y mit $-H_\mathrm{x}$ ist

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = 2f_\pm(z \mp c't), \tag{16.13}$$
$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} \mp \sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = 2g_\pm(z \mp c't), \tag{16.14}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $f_\pm$ und $g_\pm$, woraus dann

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} = f_+(z-c't) + f_-(z+c't) \tag{16.15}$$
$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = f_+(z-c't) - f_-(z+c't) \tag{16.16}$$
$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} = g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.17}$$
$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = -g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.18}$$

folgt. Es handelt sich also um die Überlagerung von Wellen beliebiger Form, die nach oben (f_+, g_+) und nach unten (f_-, g_-) mit der Geschwindigkeit c' laufen. $c' = \mathrm{c}/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (des Lichtes) in dem jeweiligen Medium. Insbesondere finden wir, dass c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.
Wir berechnen noch die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 + f_-^2 + g_-^2) \tag{16.19}$$

und die Energiestromdichte in Form des Poynting-Vektors

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathrm{c}'\mathbf{e}_\mathrm{z}}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 - f_-^2 - g_-^2), \tag{16.20}$$

wobei wir ein homogenes Feld in z-Richtung nicht berücksichtigt haben. Durch Vergleich der Ausdrücke für u und $\mathbf{S}$ jeweils nur für die nach oben oder unten laufenden Anteile sieht man, dass die Energie mit der Geschwindigkeit der Welle $\pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z}$ transportiert wird, da $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z} u$. Wir bemerken noch, dass die Welle, für die $E_\mathrm{y} = 0$ und $H_\mathrm{x} = 0$, das heißt $g_\pm = 0$, linear polarisiert in x-Richtung heißt. Für die Angabe der Polarisationsrichtung ist immer die Richtung des Vektors $\mathbf{E}$ maßgeblich.

16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen

Allgemein kann man die elektrische Feldstärke als Fourier-Integral ansetzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{16.21}$$

analog für $\mathbf{H}$. Damit drücken wir die Felder als Überlagerung ebener periodischer Wellen aus.

16.c.α Einschub über Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode L, $f(x+L) = f(x)$, lautet

$$f(x) = \hat{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{2\pi i n x/L}. \tag{16.22}$$

f_n sind die Fourier-Koeffizienten von f. Die Darstellung ist möglich für quadrat-integrable Funktionen, mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeits-Stellen. $\hat{c}$ ist eine geeignete Konstante. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gewinnt man aus

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x/L} f(x) = \hat{c} L f_n, \tag{16.23}$$

wie man durch Einsetzen in (16.22) und Vertauschen von Summation und Integration leicht sehen kann. Die Fourier-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ durchführt und

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = f_0(k), \quad \hat{c} = \Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{16.24}$$

definiert. Dann geht nämlich (16.22) in

$$f(x) = \sum \Delta k f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \to \int_{-\infty}^{\infty} dk f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \tag{16.25}$$

über und die Rück-Transformation (16.23) in

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi f_0(k). \tag{16.26}$$

Damit können wir zum Beispiel die Rücktransformation von (16.21) zu

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r dt \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{16.27}$$

angeben.

16.c.β Zurück zu den Maxwell-Gleichungen

Die Darstellung durch die Fourier-Transformierte hat den Vorteil, dass die Gleichungen einfacher werden. Durch Anwendung der Operationen ∇ und $\partial/\partial t$ auf die Exponentialfunktion

$$\nabla \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = i\mathbf{k} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = -i\omega \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{16.28}$$

in den Maxwell-Gleichungen folgt für die Fourier-Komponenten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -i\frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \tag{16.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{H}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = i\frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.32}$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß immer nur Fourier-Komponenten mit gleichem $\mathbf{k}$ und ω miteinander verknüpft sind. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ folgt $\omega = 0$, wobei $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ beliebig sein können. Dies sind die statischen homogenen Felder. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ folgt aus (16.29) und (16.30), dass

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}. \tag{16.33}$$

Aus den beiden anderen Gleichungen (16.31) und (16.32) folgt

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\epsilon\mu}{\mathrm{c}^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.34}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c'^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega), \tag{16.35}$$

analog für $\mathbf{H}_0$. Wegen (16.29) verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (16.35). Es gibt also nicht verschwindende Lösungen, wenn die Beziehung $\omega = \pm c'k$ erfüllt ist. Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen, das heißt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenvektor für elektromagnetische Wellen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung können wir schreiben

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - c'k)\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + c'k)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}). \tag{16.36}$$

und damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right). \tag{16.37}$$

Da die elektrische Feldstärke reell sein muss, muss sie mit ihrem Konjugiert-komplexen übereinstimmen

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right) \\
&= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right).
\end{aligned} \tag{16.38}$$

Durch Koeffizienten-Vergleich folgt

$$\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}). \tag{16.39}$$

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right) \\
&= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right) \\
&= \Re\Big(\int d^3k \mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big).
\end{aligned} \tag{16.40}$$

Für $\mathbf{H}_0$ folgt dann aus (16.32)

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{\mathrm{c}}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\delta(\omega - c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) - \delta(\omega + c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\right) \tag{16.41}$$

und damit für $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\int d^3k\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \tag{16.42}$$

Trägt nur eine Fourier-Komponente bei, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (Idealisierung), so spricht man von einer monochromatischen Welle,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}) \tag{16.43}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\Re\Big(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0}\times\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}\Big). \tag{16.44}$$

Von linear polarisierten Wellen (Licht) spricht man, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1 E_{1,0}$ mit einem reellen Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$, von zirkular polarisierten, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ mit reellen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}_0$ eine orthogonale Rechtsbasis bilden. Für das obere Vorzeichen ist die Welle rechts-, für das untere links-polarisiert.

16.c.γ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale

Die Energiedichte und der Poynting-Vektor sind Größen, die bilinear in den Feldern sind. Hat man etwa monochromatische Wellen, wie in (16.43) und (16.44), so oszillieren diese Größen. Man ist aber oft am Mittelwert dieser Größen interessiert. Haben wir also zwei Größen

$$a = \Re\big(a_0\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \quad b = \Re\big(b_0\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{16.45}$$

so ist

$$ab = \frac{1}{4}a_0b_0\mathrm{e}^{-2i\omega t} + \frac{1}{4}(a_0b_0^* + a_0^*b_0) + \frac{1}{4}a_0^*b_0^*e^{2i\omega t}. \tag{16.46}$$

Der erste und der letzte Term oszillieren (wir nehmen $\omega \neq 0$ an). Sie heben sich im Zeitmittel weg, so dass im Zeitmittel bleibt

$$\overline{ab} = \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2}\Re(a_0^* b_0). \tag{16.47}$$

Man beachte, dass a_0 und b_0 im allgemeinen komplex sind, und das Zeitmittel wesentlich von der relativen Phase beider Größen und nicht nur von den Beträgen $|a_0|$ und $|b_0|$ abhängt.
Sind a und b durch Fourier-Integrale gegeben,

$$a(t) = \Re\Big(\int d\omega a_0(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t}\Big) \tag{16.48}$$

und analog für $b(t)$, so werden häufig die Zeitintegrale über diese Größen und deren Produkte endlich sein. Hierzu müssen wir das Zeitintegral $\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{e}^{-i\omega t}$ bestimmen. Dieses Integral ist nicht wohl definiert. Tatsächlich soll es aber mit einer in ω stetigen Funktion multipliziert werden, so dass es auch genügt, herauszubekommen, wie sich das Zeit-Integral über dieses Frequenz-Integral verhält. Hierzu gehen wir auf die Notation unseres Einschubs mit x und k zurück und stellen fest, dass

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L\delta_{0,n}, \tag{16.49}$$

also

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L, \tag{16.50}$$

falls $n_- \leq 0$ und $n_+ \geq 0$ sind, sonst verschwindet die Summe. Jetzt führen wir wieder den Limes $L \to \infty$ durch und erhalten

$$\sum_{k_-}^{k_+} \Delta k \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-ikx} = \Delta k L \to \int_{k_-}^{k_+} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi, \tag{16.51}$$

falls k_- negativ und k_+ positiv sind, sonst ist es Null. Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi\delta(k). \tag{16.52}$$

Mit diesem Ergebnis finden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega) + a_0^*(-\omega)\big)\big(b_0(-\omega) + b_0^*(\omega)\big). \tag{16.53}$$

Treten nur positive Frequenzen ω unter dem Integral auf, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega) b_0^*(\omega) + a_0^*(\omega) b_0(\omega)\big) = \pi\Re\Big(\int_0^{\infty} d\omega a_0^*(\omega) b_0(\omega)\Big). \tag{16.54}$$

17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern

17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen

Wir untersuchen Transversal-Schwingungen in einem homogenen Leiter. Dabei setzen wir $\mu = 1$. Aus

$$\mathbf{j}_{\mathrm{f}} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \epsilon \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma \mathbf{E}. \tag{17.2}$$

Bei periodischen Feldern der Kreisfrequenz ω,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{17.3}$$

entsprechend auch für ρ_{f} und $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$, folgt dann

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + (\frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon - \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \sigma) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

Dies können wir auch schreiben

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{i\omega}{\mathrm{c}} \epsilon(\omega) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \tag{17.5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_{\mathrm{f}} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f}} = 0 \tag{17.6}$$

folgt

$$-i\omega \rho_{\mathrm{f},0} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

und damit

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Damit gilt

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

wegen $\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_0$. Wir können daher unsere bisherigen Ergebnisse von Isolatoren auf Leiter übertragen, indem wir ϵ durch $\epsilon(\omega)$ ersetzen. So finden wir

$$k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}. \tag{17.10}$$

Da $\epsilon(\omega)$ komplex ist, ist für reelles ω der Wellenvektor $\mathbf{k}$ komplex. Wir setzen

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa, \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}(n + i\kappa) \tag{17.11}$$

und erhalten mit

$$\mathrm{e}^{ikz} = \mathrm{e}^{i\omega n z/\mathrm{c} - \omega\kappa z/\mathrm{c}} \tag{17.12}$$

eine gedämpfte Welle. Für die Felder ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re(\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega(nz/\mathrm{c} - t)}) \mathrm{e}^{-\omega\kappa z/\mathrm{c}}, & (17.13) \\ \mathbf{B} &= \Re(\sqrt{\epsilon(\omega)} \mathbf{e}_{\mathrm{z}} \times \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega(nz/\mathrm{c} - t)}) \mathrm{e}^{-\omega\kappa z/\mathrm{c}}. & (17.14) \end{aligned}$$

Die Amplitude fällt auf der Strecke $d = \frac{\mathrm{c}}{\omega\kappa}$ auf $1/\mathrm{e}$ ab (Eindringtiefe). Für kleine Frequenzen kann man approximieren

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad d = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{17.15}$$

Für Kupfer hat man $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$, für $\omega = 2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}$ folgt $d = 9$ mm. Man spricht vom Skin-Effekt. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen rapider ist.

17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Tatsächlich hängen ϵ und σ von ω ab. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers (zum Beispiel eines Elektrons im Metall) aus,

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau}\dot{\mathbf{r}}, \tag{17.16}$$

wobei m_0 und e_0 Masse und Ladung des Ladungsträgers seien. Der letzte Term ist ein Reibungsterm, der die Stöße mit anderen Teilchen pauschal beschreibt. Dabei ist τ die Relaxationszeit, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit $\mathbf{j}_\mathrm{f} = \rho_\mathrm{f}\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0\dot{\mathbf{r}}$, wobei n_0 die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_0 e_0}\frac{\partial \mathbf{j}_\mathrm{f}}{\partial t} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0\tau e_0}\mathbf{j}_\mathrm{f}. \tag{17.17}$$

Im stationären Fall $\partial\mathbf{j}_\mathrm{f}/\partial t = \mathbf{0}$ folgt die statische Leitfähigkeit $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$, so dass wir

$$\tau\frac{\partial \mathbf{j}_\mathrm{f}}{\partial t} = \sigma_0\mathbf{E} - \mathbf{j}_\mathrm{f} \tag{17.18}$$

schreiben können. Mit der Zeitabhängigkeit $\propto \mathrm{e}^{-i\omega\tau}$ folgt dann

$$(1 - i\omega\tau)\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \sigma_0\mathbf{E}_0, \tag{17.19}$$

was aufgelöst wird zu

$$\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0 \tag{17.20}$$
$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \tag{17.21}$$
$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}. \tag{17.22}$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$ folgt daraus

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{m_0\omega^2} = \epsilon\big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\big) \tag{17.23}$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \tag{17.24}$$

Für $\omega < \omega_\mathrm{P}$ erhält man ein negatives $\epsilon(\omega)$, das heißt

$$n = 0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon\big(\frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2} - 1\big)} \tag{17.25}$$

mit einem exponentiellen Abfall der Welle. Für $\omega > \omega_\mathrm{P}$ dagegen wird ϵ positiv,

$$n = \sqrt{\epsilon\big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\big)}, \quad \kappa = 0. \tag{17.26}$$

Für diese hohen Frequenzen ist der Leiter durchsichtig. Für Kupfer hat man $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$. Für sichtbares Licht hat man den Frequenz-Bereich $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, so dass Kupfer im sichtbaren Bereich undurchsichtig ist. In Elektrolyten ist jedoch die Ladungsträgerdichte niedriger, die Masse der Ladungsträger höher, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen

Für $\omega = \omega_\mathrm{P}$ ist $\epsilon(\omega) = 0$. Dann erlaubt (17.9) longitudinale elektrische Wellen

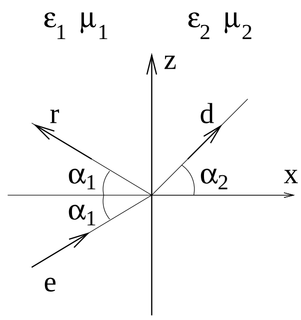
$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z\mathrm{e}^{i(k_z z - \omega_\mathrm{P} t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{17.27}$$

Diese gehen mit longitudinalen Schwingungen der Ladungsträger einher, die man erhält, wenn man den Reibungsterm in (17.17) vernachlässigt.

18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche

18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung

Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle $\propto \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ für $x < 0$, $\mathbf{k}_\mathrm{e} = (k', 0, k_\mathrm{z})$, die auf die Grenzfläche $x = 0$ auftrifft. Für $x < 0$ habe man die Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und die Permeabilität μ_1, für $x > 0$ habe man ϵ_2 und μ_2. An der Grenzfläche $x = 0$ variiert die Welle wie $\propto \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)}$. Für die reflektierte und die gebrochene Welle hat man das gleiche Verhalten an der Grenzfläche, das heißt sie stimmen alle in k_z, k_y und ω überein und unterscheiden sich nur in k_x. Aus



$$\mathbf{k}_i^2 = \frac{\epsilon_i\mu_i\omega^2}{\mathrm{c}^2} = \frac{n_i^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i\mu_i} \tag{18.1}$$

folgt

$$k_1^2 = k_\mathrm{z}^2 + k'^2 = \frac{n_1^2\omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{r} = (-k', 0, k_\mathrm{z}) \tag{18.2}$$

$$k_2^2 = k_\mathrm{z}^2 + k''^2 = \frac{n_2^2\omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{d} = (k'', 0, k_\mathrm{z}). \tag{18.3}$$

Dabei sind $n_{1,2}$ die Brechzahlen der beiden Medien. Die x-Komponente des Wellenvektors der reflektierten Welle $\mathbf{k}_\mathrm{r}$ ist gerade das Negative der einlaufenden Welle. Daher stimmt der Einfallswinkel α_1 mit dem Reflexionswinkel überein. Falls k'' reell ist, muss man $k'' > 0$ wählen, damit die Welle ausläuft und nicht einläuft. Falls k'' imaginär ist, muss man $\Im k'' > 0$ wählen, damit die Welle im Material 2 exponentiell abklingt und nicht anwächst. Für reelles k'' hat man

$$k_\mathrm{z} = k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2. \tag{18.4}$$

Daraus folgt mit (18.1) das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \tag{18.5}$$

Falls sich $\sin\alpha_2 > 1$ ergibt, entspricht das einem imaginären k''. Wir bemerken schließlich noch

$$\frac{k'}{k''} = \frac{k_1\cos\alpha_1}{k_2\cos\alpha_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}. \tag{18.6}$$

18.b Grenzbedingungen, Amplituden

Wir müssen nun zwei Polarisationen unterscheiden. Diese werden auf die Einfallsebene bezogen. Diese ist die von der Richtung des einfallenden Strahls und von der Normalen auf die Grenzfläche aufgespannte Ebene (in unseren Koordinaten die x-z-Ebene). Die Polarisation 1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, das heißt $\mathbf{E}$ ist in y-Richtung polarisiert. Die Polarisation 2 liegt in der Einfallsebene, $\mathbf{H}$ liegt in y-Richtung. Man erhält dann folgende Polarisationen und Stetigkeitsbedingungen

	Polarisation 1	Polarisation 2	
$\mathbf{E}$	$\perp$ Einfallsebene	in Einfallsebene	
$\mathbf{H}$	in Einfallsebene	$\perp$ Einfallsebene	
$\mathbf{E}_\mathrm{t}$	$E_{1,\mathrm{y}} = E_{2,\mathrm{y}}$	$E_{1,\mathrm{z}} = E_{2,\mathrm{z}}$	(18.7)
$D_\mathrm{n} = \epsilon E_\mathrm{n}$		$\epsilon_1 E_{1,\mathrm{x}} = \epsilon_2 E_{2,\mathrm{x}}$	(18.8)
$\mathbf{H}_\mathrm{t}$	$H_{1,\mathrm{z}} = H_{2,\mathrm{z}}$	$H_{1,\mathrm{y}} = H_{2,\mathrm{y}}$	(18.9)
$B_\mathrm{n} = \mu H_\mathrm{n}$	$\mu_1 H_{1,\mathrm{x}} = \mu_2 H_{2,\mathrm{x}}$		(18.10)

Für die Polarisation 1 hat man daher für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}\mathbf{e}_\mathrm{y} \cdot \begin{cases} (E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{ik'x} + E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-ik'x}) & x<0 \\ E_\mathrm{d}\mathrm{e}^{ik''x} & x>0 \end{cases} \tag{18.11}$$

anzusetzen. Aus den Maxwell-Gleichungen erhält man daraus die magnetische Feldstärke

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{H}} = \frac{i\omega\mu}{\mathrm{c}}\mathbf{H}, \tag{18.12}$$

$$\mu H_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{c}}{i\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{c}}{i\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial z} = -\frac{\mathrm{c}k_\mathrm{z}}{\omega}E_\mathrm{y} \tag{18.13}$$

$$H_\mathrm{z} = \frac{\mathrm{c}}{i\mu\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial x} = \mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}\frac{\mathrm{c}}{\omega} \cdot \begin{cases} \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}e^{ik'x} - E_\mathrm{r}e^{-ik'x}) & x<0 \\ \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}e^{ik''x} & x>0. \end{cases} \tag{18.14}$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit von E_y, die mit der Stetigkeit von H_x identisch ist, und aus der Stetigkeit von H_z,

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{d}, \quad \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e} - E_\mathrm{r}) = \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}, \tag{18.15}$$

woraus die Amplituden

$$E_\mathrm{r} = \frac{\mu_2 k' - \mu_1 k''}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e}, \quad E_\mathrm{d} = \frac{2\mu_2 k'}{\mu_2 k' + \mu_1 k''}E_\mathrm{e} \tag{18.16}$$

folgen.
Von der Polarisation 1 gelangt man zur Polarisation 2 durch die Transformation

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}, \quad \epsilon \leftrightarrow \mu. \tag{18.17}$$

Daher erhält man für die Amplituden

$$H_\mathrm{r} = \frac{\epsilon_2 k' - \epsilon_1 k''}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''}H_\mathrm{e}, \quad H_\mathrm{d} = \frac{2\epsilon_2 k'}{\epsilon_2 k' + \epsilon_1 k''}H_\mathrm{e}. \tag{18.18}$$

18.c Diskussion für $\mu_1 = \mu_2$

Wir diskutieren nun die Ergebnisse für $\mu_1 = \mu_2$, da für viele Materialien die Permeabilität praktisch gleich 1 ist.

18.c.α Isolator, $|\sin\alpha_2| < 1$: Brechung

Wir bestimmen nun die Amplitude der reflektierten Welle aus der der einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient R, das heißt der Anteil der Strahlungsleistung, die reflektiert wird, ergibt sich zu

$$R = \left(\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{e}}\right)^2 = \left(\frac{H_\mathrm{r}}{H_\mathrm{e}}\right)^2, \tag{18.19}$$

da der zeitgemittelte Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi)$ für Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, die orthogonal auf einander stehen, sich betragsmäßig zu

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}|\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| = \frac{c'}{8\pi}\epsilon E^2 = \frac{c'}{8\pi}\mu H^2 \tag{18.20}$$

ergibt. Für die Polarisation 1 ergibt sich mit (18.6)

$$E_\mathrm{r} = \frac{k' - k''}{k' + k''}E_\mathrm{e} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_2 + \tan\alpha_1}E_\mathrm{e} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)}E_\mathrm{e}. \tag{18.21}$$

Für die Polarisation 2 folgt

$$H_{\rm r} = \frac{n_2^2 k' - n_1^2 k''}{n_2^2 k' + n_1^2 k''} H_{\rm e} = \frac{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 - \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1} H_{\rm e} = \frac{\tan(\alpha_1-\alpha_2)}{\tan(\alpha_1+\alpha_2)} H_{\rm e}. \tag{18.22}$$

Man erkennt, dass bei der Polarisation 2 die Reflexion verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, woraus dann wegen $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ und (18.5) $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ folgt. Dies ist der Brewstersche Winkel. Bei Einfall von Licht unter diesem Winkel wird nur Licht der Polarisation 1 reflektiert. Dies kann zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes verwendet werden. Im Limes α gegen Null, das heißt bei senkrechtem Auffall des Lichtes ergibt sich für beide Polarisationen (die in diesem Limes nicht mehr zu unterscheiden sind)

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \quad \alpha = 0 \tag{18.23}$$

18.c.β Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion

In diesem Fall ist k'' imaginär. Die Welle dringt nur noch exponentiell abklingend in das zweite Material ein. Jeweils den ersten Ausdrücken in (18.21) und (18.22) entnimmt man, da der Zähler des Bruchs das konjugiert Komplexe des Nenners ist, dass

$$|E_{\rm r}| = |E_{\rm e}|, \quad |H_{\rm r}| = |H_{\rm e}|. \quad R = 1, \tag{18.24}$$

Man hat also Totalreflexion.

18.c.γ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$

Im Falle der metallischen Reflexion setzen wir $n_1 = 1$ (Vakuum oder Luft) und $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Dann folgt für den Reflexionskoeffizient für $\alpha = 0$ aus (18.23)

$$R = \left|\frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1}\right| = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \tag{18.25}$$

Für $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ folgt dann aus (17.5) und (17.15)

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\sigma}}, \tag{18.26}$$

ein Ergebnis, das nach Hagen und Rubens benannt ist.

18.c.δ Oberflächenwellen am Leiter

Wir wollen nun noch Wellen betrachten, die sich an der Grenzfläche von Leiter und Vakuum entlang bewegen. Wir setzen also $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ aus (17.5). Wir benötigen dann auf jeder Seite der Grenzfläche genau eine Welle. Das erreichen wir, wenn wir die Lösung aufsuchen, bei der keine Welle reflektiert wird. Das heißt, wir nehmen formal die Welle mit Polarisation 2, bei der $H_{\rm r}$ in (18.18) verschwindet, also

$$\epsilon(\omega) k' = k'' \tag{18.27}$$

gilt. Zusammen mit (18.2) und (18.3)

$$k_{\rm z}^2 + k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_{\rm z}^2 + k''^2 = \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \tag{18.28}$$

findet man die Lösung

$$k_{\rm z} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}}, \quad k' = \frac{k_{\rm z}}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad k'' = \sqrt{\epsilon(\omega)} k_{\rm z}. \tag{18.29}$$

Mit der Näherung (17.15) erhält man für nicht zu große Frequenzen

$$k_{\mathrm{z}} = \frac{\omega}{\mathrm{c}}\left(1 + \frac{i\omega}{8\pi\sigma}\right) \tag{18.30}$$

$$k' = \frac{(1-i)\omega^{3/2}}{2\mathrm{c}\sqrt{2\pi\sigma}} \tag{18.31}$$

$$k'' = \frac{(1+i)\omega^{1/2}\sqrt{2\pi\sigma}}{\mathrm{c}}. \tag{18.32}$$

Für kleine Frequenzen, $\omega < \sigma$, ist daher der exponentielle Abfall in Ausbreitungsrichtung (k_{z}) am langsamsten, in das Vakuum hinein etwas schneller (k') und im Metall am schnellsten (k'').

19 Hohlleiter

Es gibt verschiedene Arten von Wellenleitern. Diese können zum Beispiel aus zwei Leitern bestehen, die entweder nebeneinander herlaufen (zwei Drähte) oder koaxiale Leiter sind. Man kann aber auch elektromagnetische Wellen in einem dielektrischen Wellenleiter (Lichtleiter) oder in einem Hohlleiter führen.
In allen Fällen wollen wir davon ausgehen, dass Translationsinvarianz in z-Richtung besteht, so dass die Materialgrößen ϵ, μ und σ nur Funktionen von x und y sind. Dann kann man die elektromagnetischen Felder ansetzen zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{19.1}$$

Es bleiben nun die Funktionen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\omega(k_z)$ zu bestimmen.

19.a Hohlleiter

Wir wollen das Programm für einen Hohlleiter durchführen, das heißt für einen Metallzylinder (nicht notwendig mit kreisförmigem Querschnitt). Wir beginnen mit den Randbedingungen, wobei wir die metallische Oberfläche als idealen Leiter annehmen, $\sigma = \infty$. Dann gilt an der Oberfläche

$$\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

da eine tangentiale Komponente eine unendlich große Stromdichte an der Oberfläche bewirken würde. Weiter folgt aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c}$

$$ikB_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E})_\mathrm{n} = (\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{t})\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n} \quad k = \omega/\mathrm{c}, \tag{19.3}$$

woraus

$$B_\mathrm{n} = 0 \tag{19.4}$$

folgt.
Im Inneren des Hohlleiters gilt

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_\mathrm{y} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{B}_\mathrm{y} \quad \to \quad ik_\mathrm{z}E_{0,\mathrm{x}} - \nabla_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{z}} = ikB_{0,\mathrm{y}} \tag{19.5}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{B})_\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{E}_\mathrm{x} \quad \to \quad \nabla_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{z}} - ik_\mathrm{z}B_{0,\mathrm{y}} = -ikE_{0,\mathrm{x}}. \tag{19.6}$$

Unter Verwendung von

$$k_\perp^2 = k^2 - k_\mathrm{z}^2 \tag{19.7}$$

lassen sich die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausdrücken

$$k_\perp^2 E_{0,\mathrm{x}} = ik_\mathrm{z}\nabla_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{z}} + ik\nabla_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{z}} \tag{19.8}$$

$$k_\perp^2 B_{0,\mathrm{y}} = ik\nabla_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{z}} + ik_\mathrm{z}\nabla_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{z}}. \tag{19.9}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $E_{0,\mathrm{y}}$ und $B_{0,\mathrm{x}}$. Zur Bestimmung der Longitudinalkomponenten verwenden wir die Wellengleichung

$$(\triangle - \frac{\partial^2}{\mathrm{c}^2\partial t^2})(E_{0,\mathrm{z}}e^{i(k_z z - \omega t)}) = 0, \tag{19.10}$$

woraus

$$(\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2)E_{0,\mathrm{z}}(x,y) = 0 \tag{19.11}$$

und analog

$$(\nabla_\mathrm{x}^2 + \nabla_\mathrm{y}^2 + k_\perp^2)B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = 0 \tag{19.12}$$

folgt. Man kann zeigen, dass damit für $k_\perp \neq 0$ auch die übrigen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind. Es gilt nämlich

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div} \mathbf{E} = ik_z \\ k_\perp^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}}/\mathrm{c})_z = ik \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) E_{0,z} e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{19.13}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \operatorname{div} \mathbf{B} = ik_z \\ k_\perp^2 (\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c})_z = -ik \end{array}\right\} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) B_{0,z} e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{19.14}$$

Es genügt daher, die Wellengleichungen zu erfüllen. Wir bemerken weiter, dass $E_{0,z}$ und $B_{0,z}$ von einander unabhängig sind. Man unterscheidet dementsprechend TE-Moden (transversal elektrisch) mit $E_{0,z} = 0$ und TM-Moden (transversal magnetisch) mit $B_{0,z} = 0$.
Wir kommen nun nochmals auf die Randbedingungen zurück. Die Komponenten senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung z lassen sich

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_x E_{0,x} + \mathbf{e}_y E_{0,y}) = ik_z \operatorname{grad} E_{0,z} - ik \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} B_{0,z} \tag{19.15}$$

$$k_\perp^2 (\mathbf{e}_x B_{0,x} + \mathbf{e}_y B_{0,y}) = ik_z \operatorname{grad} B_{0,z} + ik \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} E_{0,z} \tag{19.16}$$

schreiben. Für die TE-Mode ist $E_{0,z} = 0$. Am Rand muss $\mathbf{E}_t = \mathbf{0}$ sein. $E_{0,z}$ ist bereits Null. Es muss noch die Komponente von $\mathbf{E}_0$ parallel zur Oberfläche verschwinden. Das ist genau der Fall, wenn die Normalkomponente von $\operatorname{grad} B_{0,z}$ verschwindet, $(\operatorname{grad} B_{0,z})_n = 0$. Damit folgt gleichzeitig $B_n = 0$. Für die TM-Mode ist $B_{0,z} = 0$. Wegen $\mathbf{E}_t = 0$ muss $E_{0,z} = 0$ auf der Oberfläche gelten. Dann ist $\operatorname{grad} E_{0,z}$ senkrecht auf der Oberfläche und $\mathbf{E}_t = \mathbf{0}$ und $B_n = 0$ sind auf der Oberfläche erfüllt.
Damit ist das folgende Eigenwert-Problem zu lösen

$$\text{TM-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) E_{0,z} = 0, \quad E_{0,z} = 0 \text{ auf der Oberfläche}, \tag{19.17}$$

$$\text{TE-Mode:} \quad (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2) B_{0,z} = 0, \quad (\operatorname{grad} B_{0,z})_n = 0 \text{ auf der Oberfläche}. \tag{19.18}$$

Es folgt das Dispersionsgesetz

$$\omega = \mathrm{c}\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}. \tag{19.19}$$

TEM-Moden Wir haben den Fall $k_\perp = 0$ bisher nicht diskutiert. Wir wollen dies nicht in allen Details tun. Man kann zeigen, dass für diese Moden beide Longitudinal-Komponenten verschwinden, $E_{0,z} = B_{0,z} = 0$. Man spricht daher von TEM-Moden. Für diese folgt mit $k_z = \pm k$ aus (19.5) und analog durch eine Drehung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ um 90^0 um die z-Achse $E_{0,x} \to E_{0,y}$, $B_{0,y} \to -B_{0,x}$

$$B_{0,y} = \pm E_{0,x}, \quad B_{0,x} = \mp E_{0,y}. \tag{19.20}$$

Aus $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = 0$ folgt dann, dass man $\mathbf{E}_0$ durch den Gradienten eines Potentials darstellen kann

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad} \Phi(x, y), \tag{19.21}$$

das wegen $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0$ die Potentialgleichung erfüllt

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2) \Phi(x, y) = 0. \tag{19.22}$$

Es ist also die homogene Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen zu lösen. Wegen $\mathbf{E}_{0,t} = \mathbf{0}$ muss auf der Leiteroberfläche das Potential konstant sein. Daher erhält man eine nicht-triviale Lösung nur in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, also nicht im Innern eines kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitts, aber außerhalb, oder in Koaxialkabeln, oder im Außenraum zweier Drähte.

19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt

Wir bestimmen die Wellen im Hohlleiter für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen a und b. Für die TM-Wellen machen wir den Produkt-Ansatz

$$E_{0,z}(x, y) = f(x) g(y) \tag{19.23}$$

Einsetzen in (19.11) gibt

$$f''g + fg'' + k_\perp^2 fg = 0 \tag{19.24}$$

oder

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -k_\perp^2, \tag{19.25}$$

woraus folgt, dass f''/f und g''/g konstant sind. Da $E_{0,\mathrm{z}}$ am Rand verschwinden muss, folgt

$$E_{0,\mathrm{z}}(x,y) = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2, \quad n \geq 1, m \geq 1. \tag{19.26}$$

Für die TE-Welle erhält man mit dem entsprechendenen Ansatz

$$B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.27}$$

und der Randbedingung $(\operatorname{grad} B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n} = 0$ die Lösungen

$$B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = B_0 \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n+m \geq 1. \tag{19.28}$$

19.c Wellenpakete

Vielfach hat man es nicht mit monochromatischen Wellen, sondern mit Wellenpaketen zu tun, die aus Fourierkomponenten mit $k_\mathrm{z} \approx k_{\mathrm{z},0}$ bestehen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) \int dk_\mathrm{z} f_0(k_\mathrm{z}) \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} z - \omega(k_\mathrm{z})t)}, \tag{19.29}$$

wobei $f_0(k_\mathrm{z})$ bei $k_\mathrm{z} = k_{\mathrm{z},0}$ ein Maximum hat und für andere k_z-Werte rasch abfällt. Dann entwickeln wir $\omega(k_\mathrm{z})$ um $k_{\mathrm{z},0}$

$$\omega(k_\mathrm{z}) = \omega(k_{\mathrm{z},0}) + v_\mathrm{gr}(k_\mathrm{z} - k_{\mathrm{z},0}) + ... \tag{19.30}$$

$$v_\mathrm{gr} = \left.\frac{d\omega(k_\mathrm{z})}{dk_\mathrm{z}}\right|_{k_\mathrm{z}=k_{\mathrm{z},0}}. \tag{19.31}$$

In linearer Näherung dieser Entwicklung folgt dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) e^{i(k_{\mathrm{z},0} z - \omega(k_{\mathrm{z},0})t)} f(z - v_\mathrm{gr}t), \quad f(z - v_\mathrm{gr}t) = \int dk_\mathrm{z} f_0(k_\mathrm{z}) \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} - k_{\mathrm{z},0})(z - v_\mathrm{gr}t)}. \tag{19.32}$$

Der Vorfaktor enthält die Phase $\phi = k_{\mathrm{z},0} z - \omega(k_{\mathrm{z},0})t$. Das Paket oszilliert also mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{ph} = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_\phi = \frac{\omega(k_{\mathrm{z},0})}{k_{\mathrm{z},0}}. \tag{19.33}$$

Die Ortsabhängigkeit der Amplitude steckt dagegen in der Funktion $f(z - v_\mathrm{gr}t)$. Das Wellenpaket bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit (auch Signalgeschwindigkeit) v_gr, (19.31).
Für die Wellen des Hohlleiters finden wir aus (19.19)

$$v_\mathrm{ph} = \mathrm{c}\frac{\sqrt{k_\perp^2 + k_{\mathrm{z},0}^2}}{k_{\mathrm{z},0}}, \tag{19.34}$$

$$v_\mathrm{gr} = \mathrm{c}\frac{k_{\mathrm{z},0}}{\sqrt{k_\perp^2 + k_{\mathrm{z},0}^2}}. \tag{19.35}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, die Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Geht man bei der Entwicklung (19.30) über den linearen Term hinaus, so findet man, dass die Wellenpakete auseinanderfließen.
Aufgabe Bestimme $\omega(k)$ für Transversal-Schwingungen in einem Leiter oberhalb der Plasmafrequenz (Abschnitt 17.b) für $\epsilon = 1$ und die daraus resultierende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

G Elektrodynamische Potentiale

20 Elektrodynamische Potentiale, Eichtransformationen

In der Elektrostatik haben wir bereits das elektrische Potential Φ kennengelernt, in der Magnetostatik das Vektorpotential $\mathbf{A}$. Beide können auch für die zeitabhängigen Probleme eingeführt werden und erlauben auch dann die Bestimmung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$.

20.a Potentiale

Die dritte und vierte Maxwell-Gleichung sind homogen, das heißt, sie enthalten die Ladungen und Ströme nicht explizit. Sie erlauben, die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch Potentiale auszudrücken. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{20.1}$$

Beweis: Wegen $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ gilt $\triangle\mathbf{B} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ (B.26), woraus dann ähnlich wie in (9.16) und (9.17)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\big(\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')\big)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int d^3r'\,\frac{\operatorname{rot}'\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{20.2}$$

bei der Einführung des Vektorpotentials in der Magnetostatik folgt. Ein elementarer Beweis folgt als Übungsaufgabe.
Aus $\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = \mathbf{0}$ folgt dann

$$\operatorname{rot}\big(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\big) = \mathbf{0}, \tag{20.3}$$

so dass das Argument unter der Rotation als Gradient geschrieben werden kann. Konventionell setzt man dafür $-\operatorname{grad}\Phi$, so dass die Darstellung

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\Phi \tag{20.4}$$

folgt. Der zweite Term ist aus der Elektrostatik bekannt. In der Zeitableitung von $\mathbf{A}$ steckt das Induktionsgesetz. Man sieht umgekehrt, dass die Darstellung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ durch die Potentiale in (20.4) und (20.1) die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen erfüllt.

20.b Eichtransformationen

Die Potentiale $\mathbf{A}$ und Φ sind nicht eindeutig durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bestimmt. Wir können $\mathbf{A}$ durch

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \operatorname{grad}\Lambda(\mathbf{r},t) \tag{20.5}$$

ersetzen, ohne $\mathbf{B}$ zu ändern

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}', \tag{20.6}$$

da $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = \mathbf{0}$. Dann folgt

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}' - \operatorname{grad}(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}). \tag{20.7}$$

Ersetzen wir gleichzeitig Φ durch

$$\Phi'(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}(\mathbf{r},t), \tag{20.8}$$

so bleiben $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unverändert. Man bezeichnet die Transformation (20.5) und (20.8) von $\mathbf{A}$ und Φ als Eichtransformation.
Die Willkür in der Eichung erlaubt es, Einschränkungen an die Potentiale Φ und $\mathbf{A}$ zu fordern. Die folgenden beiden Eichungen werden häufig verwendet

$$\text{Lorenz-Eichung} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0, \tag{20.9}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{20.10}$$

Hat man Potentiale Φ' und $\mathbf{A}'$, die die gewünschte Eichung nicht erfüllen, so erhält man Potentiale Φ und $\mathbf{A}$ durch geeignete Wahl von Λ

$$\text{Lorenz-Eichung} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi}' = \Box\Lambda, \tag{20.11}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' = \triangle\Lambda, \tag{20.12}$$

wobei

$$\Box := \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{20.13}$$

der d'Alembert-Operator ist. Die Lorenz-Eichung geht auf den dänischen Physiker Ludvig V. Lorenz (1867) zurück im Gegensatz zur Loerentz-Transformation (Abschnitt 23), die dem holländischen Physiker Hendrik A. Lorentz zuzuschreiben ist.
Einsetzen der Ausdrücke (20.4) und (20.1) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in die erste Maxwell-Gleichung ergibt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\ddot{\mathbf{A}} + \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{grad}\dot{\Phi} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}, \tag{20.14}$$

das heißt

$$-\Box\mathbf{A} + \operatorname{grad}\big(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi}\big) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}, \tag{20.15}$$

während die zweite Maxwell-Gleichung dann

$$-\triangle\Phi - \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \tag{20.16}$$

lautet.
Daraus folgt für die beiden Eichungen

$$\text{Lorenz-Eichung} \qquad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \\ \Box\Phi = -4\pi\rho \end{cases} \tag{20.17}$$

$$\text{Coulomb-Eichung} \qquad \begin{cases} \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j} + \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{grad}\dot{\Phi} \\ \triangle\Phi = -4\pi\rho. \end{cases} \tag{20.18}$$

Aufgabe Zeige, dass ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ genügt, als $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierzu setze man $A_{\mathrm{z}}(\mathbf{r}) = 0$ und drücke $A_{\mathrm{y}}(\mathbf{r})$ durch $A_{\mathrm{y}}(x,y,0)$ und B_{x}, ähnlich $A_{\mathrm{x}}(\mathbf{r})$ durch $A_{\mathrm{x}}(x,y,0)$ und B_{y} aus. Dies setze man in $B_{\mathrm{z}} = (\operatorname{rot}\mathbf{A})_{\mathrm{z}}$ ein und zeige unter Verwendung von $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, dass man passende Komponenten von $\mathbf{A}$ bei $\mathbf{r} = (x,y,0)$ finden kann.

21 Die elektromagnetischen Potentiale einer allgemeinen Ladungs- und Stromverteilung

21.a Berechnung der Potentiale

In der Lorenz-Eichung hatten wir (20.17)

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{21.1}$$

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{21.2}$$

mit dem d'Alembert-Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{21.3}$$

und der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\Phi} = 0. \tag{21.4}$$

Wir führen bezüglich der Zeit die Fourier-Transformierte ein

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.5}$$

analog für $\mathbf{A}$, ρ, $\mathbf{j}$. Dann folgt

$$\Box\Phi(\mathbf{r},t) = \int d\omega(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \int d\omega(-4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega))\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

woraus durch Vergleich der Integranden

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\hat{\rho}(\mathbf{r},\omega) \tag{21.7}$$

folgt. Wir führen dazu die Greens-Funktion G ein, das heißt, die Lösung der linearen Differentialgleichung werde geschrieben als

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega). \tag{21.8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (21.7) ein, so folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{21.9}$$

Da keine Richtung ausgezeichnet ist und die Gleichung invariant gegen Verschiebungen der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ um einen gleichen konstanten Vektor ist, ist anzunehmen, dass die Lösung G nur vom Abstand zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ und zusätzlich natürlich von dem Parameter ω abhängt

$$G = g(a,\omega), \quad a = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{21.10}$$

Damit folgt

$$(\triangle + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2})g(a,\omega) = \frac{1}{a}\frac{d^2(ag)}{da^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}g = 0 \text{ für } a \neq 0. \tag{21.11}$$

Dabei verwenden wir den Laplace-Operator in der Form (5.15), wobei $\triangle_\Omega g = 0$, da g nicht von der Richtung von $\mathbf{a} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$, sondern nur vom Betrag a abhängt. Dies ergibt die Schwingungsgleichung für ag, hat also die Lösung

$$G = g(a,\omega) = \frac{1}{a}\big(c_1 e^{i\omega a/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega a/\mathrm{c}}\big). \tag{21.12}$$

Für kleinen Abstand divergiert die Lösung wie $(c_1 + c_2)/a$. Um die δ-Funktion in (21.9) als Inhomogenität mit dem richtigen Vorfaktor zu erhalten, muss $c_1 + c_2 = 1$ sein. Wir setzen nun der Reihe nach ein

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \int d\omega \hat{\Phi}(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} \\
&= \int d\omega \int d^3r' \mathrm{e}^{-i\omega t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d\omega \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(c_1 e^{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}} + c_2 e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}}\right)\mathrm{e}^{-i\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \\
&= \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(c_1\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}) + c_2\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}})\right).
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile haben wir G eingesetzt. Anschließend führen wir die ω-Integration aus, vergleiche (21.5). Allerdings ist ω im Exponenten in (21.13) nicht mit t, sondern mit $t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}$ multipliziert. Die Lösung in der letzten Zeile enthält einen Beitrag zu Φ zur Zeit t, der von ρ zu früherer Zeit (mit Faktor c_1) und einen, der von ρ zu späterer Zeit (mit Faktor c_2) abhängt. Man bezeichnet die Lösung, die nur den ersten Beitrag ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) enthält, als die retardierte Lösung und die, die nur den zweiten Beitrag ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$) enthält, als die avancierte Lösung.

$$\Phi_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.14}$$

Physikalisch ist in der Regel die retardierte Lösung (oberes Vorzeichen), da man davon ausgeht, dass das Potential durch die Ladungsverteilung, aber nicht die Ladungsverteilung durch das Potential entsteht. Analog erhält man die retardierte und avancierte Lösung für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r,a}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\mathrm{c}}). \tag{21.15}$$

21.b Eichbedingung

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}) + \int d^3r' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}. \tag{21.16}$$

Die Argumente von ρ und $\mathbf{j}$ sind wie oben $\mathbf{r}'$ und $t' = t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mathrm{c}$. Im zweiten Integral kann man ∇ durch $-\nabla'$ ersetzen und dann partiell integrieren. Das führt auf

$$\dot{\Phi} + \mathrm{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\dot{\rho} + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}). \tag{21.17}$$

Da $(\nabla + \nabla')t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ist, folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) + (\nabla + \nabla')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')) = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')|_{t'} = 0, \tag{21.18}$$

so dass die Eichbedingung (20.9) erfüllt ist, da der Integrand in (21.17) wegen der Kontinuitätsgleichung verschwindet.

22 Ausstrahlung harmonischer Schwingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir schwingende Ladungen und Ströme als Strahlungsquellen.

22.a Strahlungsfeld

Wir betrachten harmonische Schwingungen, das heißt, die Zeitabhängigkeit von ρ und $\mathbf{j}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-i\omega t}$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\big(\rho_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big) \tag{22.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{22.2}$$

analog für Φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$. Es folgt

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Re\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}. \tag{22.3}$$

Mit $k=\omega/\mathrm{c}$ folgt

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{22.4}$$

analog

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{22.5}$$

22.a.α Nahzone (Statische Zone)

In der Nahzone, das heißt für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\ll 2\pi$, was gleichbedeutend ist mit $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\ll\lambda$, wobei λ die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist, kann $\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ durch 1 genähert werden. Damit werden die Potentiale Φ_0, (22.4) und $\mathbf{A}_0$, (22.5) zu den Potentialen der Elektro- und Magnetostatik (3.14) und (9.17).

22.a.β Fernzone (Strahlungszone)

Für große Entfernungen entwickelt man im Exponenten

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'+O(\frac{r'^2}{r}),\quad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{22.6}$$

Dies ist gerechtfertigt für $r\gg kR^2$, wobei R eine Abschätzung für die Ausdehnung der Ladungs- bzw. Stromverteilung ist, $r'<R$ für $\rho(\mathbf{r}')\neq 0$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}')\neq\mathbf{0}$. Im Nenner approximieren wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r$, was für $r\gg R$ gut ist. Dann folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{cr}\mathbf{g}(k\mathbf{n})+O(\frac{1}{r^2}) \tag{22.7}$$

mit der Fourier-Transformierten der Stromverteilung

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \int d^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{22.8}$$

Hieraus folgt das Magnetfeld

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\operatorname{grad}\mathrm{e}^{ikr}}{cr}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n})+O(\frac{1}{r^2}) = ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{cr}\mathbf{n}\times\mathbf{g}+O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.9}$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \to \operatorname{rot}\mathbf{B}_0 = -\frac{i\omega}{\mathrm{c}}\mathbf{E}_0 \tag{22.10}$$

zu

$$\mathbf{E}_0 = \frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 = -\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0 + O(\frac{1}{r^2}). \tag{22.11}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{n}$ bilden ein Orthogonalsystem. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind betragsmäßig gleich und fallen wie $1/r$ ab. Der Poynting-Vektor liefert im zeitlichen Mittel

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\overline{\Re\mathbf{E}\times\Re\mathbf{B}} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{E}_0^*\times\mathbf{B}_0) \\ &= -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re\big((\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0^*)\times\mathbf{B}_0\big) = -\frac{\mathrm{c}}{8\pi}\Re(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^* + \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^*\cdot\mathbf{B}_0).\end{aligned} \tag{22.13}$$

Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet, da $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{n}$. Es bleibt daher

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathbf{n}(\mathbf{B}_0^*\cdot\mathbf{B}_0) = \frac{k^2\mathbf{n}}{8\pi c r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 + O(\frac{1}{r^3}). \tag{22.14}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ist dann

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{k^2}{8\pi c}\int|\mathbf{n}\times\mathbf{g}(k\mathbf{n})|^2 d\Omega_n, \tag{22.15}$$

wobei über den Raumwinkel Ω_n von $\mathbf{n}$ integriert wird.

22.b Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

Erstreckt sich die Ladungs- und Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge λ kleinen Bereich R, so ist es sinnvoll, $\mathrm{e}^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}$ zu entwickeln

$$\mathbf{g}(k\mathbf{n}) = \mathbf{g}^{(0)} - ik\mathbf{g}^{(1)} + ..., \quad \mathbf{g}^{(0)} = \int d^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{g}^{(1)} = \int d^3r'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \tag{22.16}$$

Diese Entwicklung reicht aus, um das Strahlungsfeld in der Fernzone zu untersuchen. Ist man daran interessiert, auch Nah- und Übergangszone zu betrachten, so muss man

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} + \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}(-ik+\frac{1}{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') + O(r'^2) \tag{22.17}$$

in dem Ausdruck für $\mathbf{A}_0$ entwickeln, was

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{cr}\mathbf{g}^{(0)} + (-ik+\frac{1}{r})\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{cr}\mathbf{g}^{(1)} + ... \tag{22.18}$$

ergibt.
Wir betrachten zunächst den Beitrag von $\mathbf{g}^{(0)}$. Wir verwenden, dass

$$\mathrm{div}\,'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \mathrm{div}\,'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = i\omega\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.19}$$

Dann folgt aus

$$\int d^3r'\,\mathrm{div}\,'\big(f(\mathbf{r}')\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')\big) = 0 \tag{22.20}$$

die Beziehung

$$\int d^3r'\,\mathrm{grad}\,'f(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r'f(\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}'). \tag{22.21}$$

Mit $f(\mathbf{r}') = x'_\alpha$ folgt dann

$$g_\alpha^{(0)} = \int d^3r'j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') = -i\omega\int d^3r'x'_\alpha\rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega p_{0,\alpha}, \tag{22.22}$$

das heißt, $\mathbf{g}^{(0)}$ lässt sich durch die Amplitude des elektrischen Dipolmoments ausdrücken

$$\mathbf{g}^{(0)} = -i\omega\mathbf{p}_0. \tag{22.23}$$

Man bezeichnet daher diesen Anteil als elektrische Dipolstrahlung. Es folgt

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -ik\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{p}_0, \tag{22.24}$$

daraus

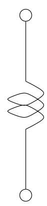
$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2}\right)\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0 \tag{22.25}$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{r}\mathrm{e}^{ikr}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0\big)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)\mathrm{e}^{ikr}. \tag{22.26}$$

Der erste Term ist der führende in der Fernzone ($1/r \ll k$), der zweite führt in der Nahzone ($1/r \gg k$). Aus dem Ausdruck für die Fernzone erhält man als zeitgemittelten Poynting-Vektor

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{c}k^4\mathbf{n}}{8\pi r^2}|\mathbf{n}\times\mathbf{p}_0|^2 = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2\mathbf{n}}{8\pi r^2}\sin^2\theta, \tag{22.27}$$

Im zweiten Ausdruck wird angenommen, dass Realteil und Imaginärteil von $\mathbf{p}_0$ in die gleiche Richtung weisen. Dann ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{n}$. Die abgestrahlte Leistung ist dann



$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4|\mathbf{p}_0|^2}{3}. \tag{22.28}$$

Die Leistung nimmt also mit der vierten Potenz der Frequenz ($\omega = \mathrm{c}k$) zu (Rayleigh-Streuung). Als Beispiel kann man zwei Kondensatorkugeln im Abstand l mit $I(t) = \Re(I_0\mathrm{e}^{-i\omega t})$ betrachten. Dann ist

$$|\mathbf{g}^{(0)}| = |\int d^3r'\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')| = |\int dlI_0| = |I_0 l|, \quad p_0 = \frac{iI_0 l}{\omega}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{(klI_0)^2}{3\mathrm{c}} \tag{22.29}$$

Diese Leistungsabgabe bedingt einen Strahlungswiderstand R_s

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{1}{2}R_\mathrm{s}I_0^2, \quad R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}(kl)^2 \hat{=} 20\Omega\cdot(kl)^2 \tag{22.30}$$

zusätzlich zum Ohmschen Widerstand. Man beachte $\frac{1}{\mathrm{c}}\hat{=}30\Omega$, vergleiche (A.4).

22.c Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nun den zweiten Term in (22.16)

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(1)} &= n_\beta\int d^3r' x'_\beta j_{0,\alpha}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{n_\beta}{2}\int d^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} - x'_\alpha j_{0,\beta}) + \frac{n_\beta}{2}\int d^3r'(x'_\beta j_{0,\alpha} + x'_\alpha j_{0,\beta}). \end{aligned} \tag{22.31}$$

Der erste Term ergibt das magnetische Dipolmoment (10.7)

$$n_\beta \mathrm{c}\epsilon_{\beta,\alpha,\gamma}m_{0,\gamma} = -\mathrm{c}(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)_\alpha. \tag{22.32}$$

Der zweite Term lässt sich durch das elektrische Quadrupolmoment (4.10) ausdrücken. Mit $f = \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta$ ergibt er sich mit (22.21) zu

$$-i\omega\frac{n_\beta}{2}\int d^3r' x'_\alpha x'_\beta\rho_0(\mathbf{r}') = -i\omega\frac{n_\beta}{2}\Big(Q_{0,\alpha,\beta} + \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\int d^3r' r'^2\rho_0(\mathbf{r}')\Big). \tag{22.33}$$

Damit haben wir

$$\mathbf{g}^{(1)} = -\mathrm{c}\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 - \frac{i\omega}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha + \text{ const. }\mathbf{n}. \tag{22.34}$$

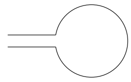
Wir beobachten, dass der dritte Term proportional $\mathbf{n}$ keinen Beitrag zu $\mathbf{B}_0$ (22.9) und $\mathbf{E}_0$ (22.11) liefert.

22.c.α Magnetische Dipolstrahlung

Der erste Beitrag in (22.34) gibt die magnetische Dipolstrahlung. Wir finden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) &= \big(ik - \frac{1}{r}\big)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0 && (22.35)\\
\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) &= -k^2\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0) + \big(3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_0)-\mathbf{m}_0\big)\big(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\big)\mathrm{e}^{ikr} && (22.36)\\
\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \big(-\frac{k^2}{r}-\frac{ik}{r^2}\big)(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_0)\mathrm{e}^{ikr}. && (22.37)
\end{aligned}
$$

Als Beispiel betrachtet man einen Kreisstrom, der eine Fläche f einschließt,



$$
m_0 = I_0 f/\mathrm{c}, \quad \dot{U}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{c}k^4 m_0^2}{3} = \frac{k^4 I_0^2 f^2}{3\mathrm{c}}, \qquad (22.38)
$$

was einem Strahlungswiderstand

$$
R_\mathrm{s} = \frac{2}{3\mathrm{c}}k^4 f^2 \hat{=} 20\Omega\,(k^2 f)^2 \qquad (22.39)
$$

entspricht.

22.c.β Elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten noch den zweiten Term aus (22.34) in der Fernzone. Dieser liefert

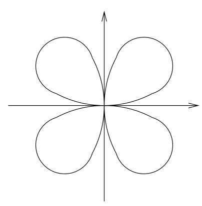
$$
\mathbf{g} = -ik\mathbf{g}^{(1)} = -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_{0,\alpha,\beta}n_\beta\mathbf{e}_\alpha. \qquad (22.40)
$$

Als Spezialfall untersuchen wir den symmetrischen Quadrupol (4.27), $Q_{0,\mathrm{x,x}} = Q_{0,\mathrm{y,y}} = -\frac{1}{3}Q_0$, $Q_{0,\mathrm{z,z}} = \frac{2}{3}Q_0$, während die Außerdiagonal-Elemente verschwinden. Dann ist

$$
Q_{0,\alpha,\beta} = -\frac{1}{3}Q_0\delta_{\alpha,\beta} + Q_0\delta_{\alpha,3}\delta_{\beta,3}, \qquad (22.41)
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g} &= -\frac{k^2\mathrm{c}}{2}Q_0 n_3\mathbf{e}_3 + \frac{k^2\mathrm{c}}{6}Q_0\mathbf{n}, \quad n_3 = \cos\theta && (22.42)\\
\mathbf{B}_0 &= -ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3\cos\theta && (22.43)\\
\mathbf{E}_0 &= ik^3\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2r}Q_0\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)\cos\theta && (22.44)\\
\bar{\mathbf{S}} &= \frac{\mathrm{c}k^6\mathbf{n}}{32\pi r^2}|Q_0|^2\sin^2\theta\cos^2\theta && (22.45)\\
\dot{U}_\mathrm{s} &= \frac{\mathrm{c}k^6}{60}|Q_0|^2 && (22.46)
\end{aligned}
$$



folgt. Auf der Zeichnung ist die Intensität der Quadrupol-Strahlung in Abhängigkeit vom Winkel θ radial skizziert.

H Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik

23 Lorentz-Transformation

23.a Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant gegen die Galilei-Transformation (Galilei-Invarianz)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{23.1}$$

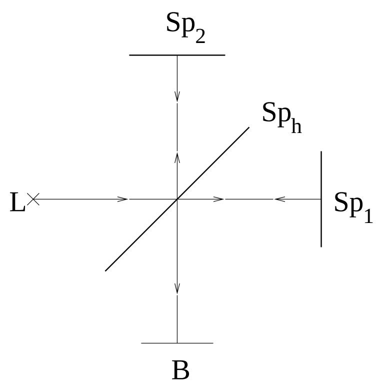
Wir werden im Folgenden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen bei geeigneter Transformation von Feldern, Strömen und Ladungen invariant sind gegen lineare Transformationen der Koordinaten x, y, z und t, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen (Lorentz-Invarianz). Eine derartige Transformation lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.2}$$

Betrachten wir zwei Ladungen q und $-q$, die sich für $t \le 0$ am gleichen Ort befinden und auch für $t \ge \Delta t$ am gleichen Ort sind, sich aber im Intervall $0 < t < \Delta t$ gegeneinander bewegen, wobei sie sich zur Zeit 0 am Ort $\mathbf{r}_0$ trennen und zur Zeit Δt am Ort $\mathbf{r}_1$ wieder zusammen kommen. Diese erzeugen nach (21.14) und (21.15) ein Feld, das sich von diesen beiden Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und am Ort $\mathbf{r}$ nur für Zeiten t von Null verschieden ist, für die $t > |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ und $t < \Delta t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c$ gilt und zwar unabhängig vom Inertialsystem, in dem wir uns befinden. (Wir müssen dabei nur voraussetzen, dass sich die Ladungen nicht mit Überlicht-Geschwindigkeit bewegen.) Wählen wir insbesondere Δt infinitesimal, so kommt der Lichtblitz zur Zeit $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ an, bewegt sich also mit Lichtgeschwindigkeit.

Da die Lorentz-Transformation nicht mit den Gesetzen der Newtonschen Mechanik verträglich ist und die Galilei-Transformation nicht mit den Maxwell-Gleichungen (das Licht müsste sich in einem bewegten Inertial-System mit einer von der Richtung abhängigen Geschwindigkeit ausbreiten), entsteht die Frage, welche der drei Möglichkeiten in der Natur erfüllt ist:
(i) es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem für die Elektrodynamik, für das die Maxwell-Gleichungen nur gelten (Äther-Hypothese),
(ii) die Newton-Mechanik ist abzuändern,
(iii) die Maxwell-Gleichungen sind abzuändern.

Die Entscheidung kann nur experimentell getroffen werden. Ein wesentlicher Versuch zur Widerlegung von (i) ist der Michelson-Morley-Versuch:Ein Lichtstrahl trifft auf einen halbdurchlässigen Spiegel $\mathrm{Sp_h}$, wird durch diesen geteilt, an zwei Spiegeln $\mathrm{Sp_1}$ und $\mathrm{Sp_2}$ im Abstand l reflektiert und an dem halbdurchlässigen Spiegel wieder zusammengeführt. Man beobachtet die Interferenz der beiden Lichtstrahlen bei B. Bewegt sich die Apparatur mit der Geschwindigkeit v in Richtung Spiegel $\mathrm{Sp_1}$, so beträgt die Laufzeit t_1 zwischen dem halbdurchlässigen Spiegel und dem Spiegel $\mathrm{Sp_1}$ und zurück



$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2} + ...). \tag{23.3}$$

Für die Laufzeit t_2 zum Spiegel Sp_2 ergibt sich

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...), \tag{23.4}$$

da sich die Lichtgeschwindigkeit c in die beiden Komponenten v und $\sqrt{c^2 - v^2}$ zerlegt. Damit bleibt ein Gangunterschied

$$t_1 - t_2 = \frac{lv^2}{c^3}, \tag{23.5}$$

der durch Verschiebung der Interferenzen messbar wäre, wenn zum Beispiel v die Geschwindigkeit der Erde gegenüber der Sonne ist. Diese Verschiebung wurde nicht beobachtet. Man kann einwenden, dass das daran liegt, dass der Äther von der Erde mitgeführt wird. Es gibt jedoch viele weitere Versuche, die für die Lorentz-Invarianz sprechen, das heißt der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig vom Inertialsystem.
Dafür spricht vor allem, dass die Konsequenzen für die Mechanik bei Versuchen mit Teilchen nahe der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei Elementarteilchen bestens bestätigt werden.

Entwicklung der Relativitätstheorie

Um die Geschwindigkeit der Erde gegen den postulierten Äther zu bestimmen führten Michelson und Morley ihr Experiment erstmals 1887 mit negativem Ergebnis durch: Keine Bewegung gegen den Äther konnte festgestellt werden. 1892 hielten Fitzgerald und Lorentz das Ätherkonzept aufrecht, indem sie postulierten, dass sich alle Gegenstände in Richtung der Bewegung gegen den Äther um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzten (vgl. Lorentz-Kontraktion, Unterabschnitt 23.b.β).
Voigt fand 1887, dass die homogene Gleichung $\Box\Phi = 0$ mit dem d'Alembert-Operator $\Box$ (20.13) unter einer Klasse von linearen Transformationen der $\mathbf{x}$ und t invariant ist. Larmor gab in seiner 1898 fertiggestellten und 1900 erschienen Arbeit *Äther und Materie* bereits die Transformation (23.2) an. Welchen Einfluss dies auf Lorentz hatte, ist nicht bekannt. 1898 zog Poincaré bereits den Begriff der Gleichzeitigkeit in Zweifel.
1904 fand Lorentz, dass die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme invariant unter den Transformationen (23.2) sind, falls man die Felder in geeigneter Weise mittransformiert (siehe Abschnitt 25). 1905 bemerkte Poincaré, dass man die Ladungs- und Stromdichten so transformieren kann, dass der volle Satz Maxwell-Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen ist (vgl. Abschnitte 24 und 25).
Einstein formulierte 1905 in Unkenntnis der Arbeit von Lorentz und gleichzeitig mit der oben genannten Arbeit von Poincaré die spezielle Relativitätstheorie in einer allgemeinen und vollständigen Weise. Er bemerkte, dass die Idee einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen eine Realität ist, die nicht nur die Elektrodynamik, sondern die gesamte Physik einschließlich der Mechanik beherrscht, und die die Galilei-Invarianz ablöst. Der Grund, dass es so lange dauerte, die (spezielle) Relativitätstheorie zu entwickeln und die Wissenschaftler davon zu überzeugen, dass diese die Realität beschreibt, ist die Rolle, die die Zeit in ihr spielt.
Es war (und ist für manchen noch heute) schwierig zu akzeptieren, dass man den Begriff einer absoluten (d. h. vom Inertialsystem unabhängigen) Gleichzeitigkeit aufgeben muss. Mehr zur Geschichte findet man in *A. Pais, "Raffiniert ist der Herrgott..." Albert Einstein, Vieweg Verlag Braunschweig*
Im Folgenden werden wir die Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit entwickeln, innerhalb deren man Transformationen vornehmen kann ähnlich den orthogonalen Transformationen im dreidimensionalen Raum, an die wir bereits gewöhnt sind. Allerdings handelt es sich dabei nicht um einen Euklidischen Raum, d. h. einen Raum mit definiter Metrik, vielmehr haben Raum und Zeit unterschiedliche Metrik (siehe metrischer Tensor g, Gleichung 23.10). Man nennt diesen Raum auch Minkowski-Raum. Wir verwenden dabei die moderne von Minkowski 1908 eingeführte vierdimensionale Notation, die von Einstein zunächst als überflüssig, später von ihm aber als nützlich eingeschätzt wurde.
Ausgehend von den Grundideen der speziellen Relativitätstheorie
Die Naturgesetze und Ergebnisse der Experimente in einem Inertialsystem sind unabhängig von der Bewegung des Systems als Ganzem.
Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die Gleiche und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

werden wir in den folgenden Abschnitten die Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen und der relativistischen Mechanik einführen.

23.b Lorentz-Transformation

Wir führen die Notation

$$x^0 = \mathrm{c}t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{23.6}$$

oder kurz

$$(x^\mu) = (\mathrm{c}t, \mathbf{r}) \tag{23.7}$$

ein, weiter

$$(x_\mu) = (\mathrm{c}t, -\mathbf{r}). \tag{23.8}$$

Dann können wir auch

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{23.9}$$

schreiben (Summationskonvention) mit

$$(g^{\cdot\cdot}) = (g_{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Man bezeichnet g als den metrischen Tensor. Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

$$C\cdot\cdot^{\mu}\cdot\cdot = g^{\mu\nu} C\cdot\cdot_{\nu}\cdot\cdot, \quad C\cdot\cdot_{\mu}\cdot\cdot = g_{\mu\nu} C\cdot\cdot^{\nu}\cdot\cdot \tag{23.11}$$

Wir vereinbaren: Indices κ, λ, μ, ν laufen von 0 bis 3, Indices α, β, γ, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (23.11) $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem Kronecker-Delta ist.
Wird ein Lichtblitz zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

$$s^2 = \mathrm{c}^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = x^\mu x_\mu = 0 \tag{23.12}$$

beschrieben. Wir bezeichnen das durch die Koordinaten x^μ beschriebene System mit S. Wir postulieren nun mit Einstein: In jedem Inertialsystem breitet sich das Licht im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. (Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Dann gilt für den Lichtblitz im gleichförmig bewegten System S' (dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von S übereinstimmt)

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{23.13}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen x' und x linear sein

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{23.14}$$

und es muss gelten $s'^2 = f s^2$ mit einer Konstanten f. Verlangen wir, dass der Raum isotrop ist und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{23.15}$$

was für beliebiges x erfüllt ist, wenn

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa \tag{23.16}$$

erfüllt ist. Die Umkehrtransformation von (23.14) folgt aus

$$x^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa x'^\mu. \tag{23.17}$$

Aus (23.16) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| \ge 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem Λ^{00}, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in S' ruhende Uhr läuft von S aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in S synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts). Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$ machen. Aus (23.16) folgt

$$\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\rho g^{\rho\kappa} = \delta_\nu{}^\kappa. \tag{23.18}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu)^2 \det(g_{\mu\lambda}) \det(g^{\rho\kappa}) = 1. \tag{23.19}$$

Da $\det(g_{\mu\lambda}) = \det(g^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1. \tag{23.20}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$. Transformationen, die

$$\Lambda^{00} > 0, \quad det(\Lambda^\mu{}_\nu) = 1 \tag{23.21}$$

erfüllen, heißen eigentliche Lorentz-Transformationen.
Gl. (23.21) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

$$dt' d^3r' = \frac{1}{\mathrm{c}} d^4x' = \frac{1}{\mathrm{c}} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = \frac{1}{\mathrm{c}} \det(\Lambda^\mu{}_\nu) d^4x = \frac{1}{\mathrm{c}} d^4x = dt d^3r. \tag{23.22}$$

Legen wir die z- und die z'-Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit v der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen wir zusätzlich $x' = x$, $y' = y$, so folgt die spezielle Transformation (23.2). Die zugehörige Matrix Λ lautet

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{23.23}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{\mathrm{c}}. \tag{23.24}$$

23.b.α Zeitdilatation

Wir betrachten nun eine in S' ruhende Uhr im System S. Aus

$$t = \gamma(t' + \frac{vz'}{\mathrm{c}^2}) \tag{23.25}$$

folgt dann

$$\Lambda_0{}^0 = \left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r}'} = \gamma. \tag{23.26}$$

Die in S' ruhende Uhr geht von S aus betrachtet langsamer

$$\Delta t' = \left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}'} \Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}} \Delta t. \tag{23.27}$$

Dieses Phänomen bezeichnet man als Zeitdilatation.

23.b.β Längenkontraktion

Aus

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{23.28}$$

folgt

$$\Lambda^3{}_3 = \left.\frac{\partial z'}{\partial z}\right|_t = \gamma \tag{23.29}$$

und damit

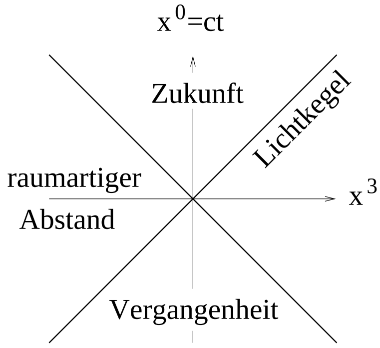
$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial z'}\right|_t \Delta z' = \frac{1}{\gamma}\Delta z' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta z'. \tag{23.30}$$

Ein Maßstab, der in S' ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in S verkürzt. Man bezeichnet das als Längenkontraktion. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert: $\Delta x' = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$.

Diese Verkürzung bewirkt, dass in (23.3) die Länge l durch $l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen ist. Dann stimmen die beiden Laufzeiten des Lichts unabhängig von der Geschwindigkeit v überein, $t_1 = t_2$.

24 Viererskalare und Vierervektoren

24.a Abstand und Eigenzeit als Viererskalare



Eine Größe, die invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, heißt Viererskalar.
Beispiel: Gegeben seien zwei Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) (x^μ), $(\bar{x}^\mu)$. Die Größe

$$s^2 = (x^\mu - \bar{x}^\mu)(x_\mu - \bar{x}_\mu) \tag{24.1}$$

ist ein Viererskalar. Sie hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert. Speziell für $\bar{x}^\mu = 0$ (Ursprung) ist $s^2 = x^\mu x_\mu$.

24.a.α Raumartiger Abstand $s^2 < 0$

Wenn $s^2 < 0$, dann gibt es Inertialsysteme, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden $x'^0 = 0$. Sei etwa $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z)$. Dann erhält man aus (23.2)

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24.2}$$

mit $v = tc^2/z$

$$t' = 0, \quad z' = \frac{z(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \tag{24.3}$$

Man bezeichnet daher zwei solche Ereignisse als raumartig zu einander gelegen.

24.a.β Zeitartiger Abstand $s^2 > 0$

In diesem Fall existiert ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). In der Transformation (23.2) wählen wir $v = z/t$. Dann folgt

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \operatorname{sign}(t)\frac{s}{c}, \quad z' = 0. \tag{24.4}$$

Ein Ereignis ist früher als das andere, das heißt, das Vorzeichen von t' stimmt mit dem von t überein.
Eigenzeit τ
Unter der Eigenzeit τ versteht man die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht. Bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, so gilt für seine Eigenzeit

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}dt, \tag{24.5}$$

also

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}}dt. \tag{24.6}$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, also ein Viererskalar.

24.a.γ Lichtartiger Abstand $s^2 = 0$

Wenn ein Lichtblitz direkt von einem Ereignis zu einem anderen läuft, dann ist deren Abstand $s = 0$. Die in einem Inertialsystem gemessene Zeit kann je nach Inertialsystem beliebig lang oder kurz sein, jedoch kann sich die Reihenfolge der Ereignisse (bei einer eigentlichen Lorentz-Transformation) nicht umkehren.
Ein weiterer Viererskalar ist die Ladung.

24.b Weltgeschwindigkeit als Vierervektor

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe (A^μ) beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten (x^μ), so bilden sie einen Vierervektor

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{24.7}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v^\mu \text{ mit } v^0 = \frac{dx^0}{dt} = \mathrm{c}\frac{dt}{dt} = \mathrm{c}. \tag{24.8}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (\mathrm{c}\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da τ invariant gegen Lorentz-Transformationen ist, transformiert sie sich wie (x^μ). Dagegen ist $(\mathrm{c}, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

$$u^\mu u_\mu = (\mathrm{c}^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = \mathrm{c}^2. \tag{24.9}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren (A^μ) und (B^μ) ein Viererskalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{24.10}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Ist (a^μ) ein beliebiger Vierervektor (oder hat man einen vollständigen Satz Vierervektoren) und ist $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar, dann ist auch (b^μ) ein Vierervektor. Beweis:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{24.11}$$

Da dies für alle (a^μ) oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (23.17) für Vierervektoren.
Additions-Theorem für Geschwindigkeiten
Das Inertialsystem S' bewege sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w' ebenfalls in z-Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S? Wir haben

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vz'}{\mathrm{c}^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}. \tag{24.12}$$

Mit $z' = w't'$ folgt dann

$$z = \frac{(v + w')t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}, \quad t = \frac{(1 + \frac{vw'}{\mathrm{c}^2})t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}. \tag{24.13}$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Punktes in S

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2}}. \tag{24.14}$$

Wir beobachten

$$1 - \frac{w^2}{\mathrm{c}^2} = 1 - \left(\frac{\frac{w'}{\mathrm{c}} + \frac{v}{\mathrm{c}}}{1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2}}\right)^2 = \frac{(1 - \frac{w'^2}{\mathrm{c}^2})(1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2})}{(1 + \frac{w'v}{\mathrm{c}^2})^2}. \tag{24.15}$$

Wenn $|w'| < \mathrm{c}$ und $|v| < \mathrm{c}$, dann ist dieser Ausdruck positiv. Dann ist also auch $|w| < \mathrm{c}$. Beispiel: $w' = v = 0.5\mathrm{c}$, dann ist $w = 0.8\mathrm{c}$.

24.c Viererstromdichte

Wir fassen Ladungs- und Stromdichte zusammen zur Viererstromdichte

$$(j^\mu) = (\mathrm{c}\rho, \mathbf{j}) \tag{24.16}$$

und überzeugen uns, dass j^μ ein Vierervektor ist. Für Ladungen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ gilt (für Ladungen verschiedener Geschwindigkeit können die Beiträge superponiert werden)

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (v^0 = \mathrm{c}), \quad j^\mu = \rho\sqrt{1-\beta^2}u^\mu \tag{24.17}$$

Falls $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar ist, ist j^μ ein Vierervektor. Nun ist

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.18}$$

mit dem Volumen V_0 im Ruhesystem und der Längenkontraktion $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$. Da die Ladung q und V_0 Viererskalare sind, ist auch $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ ein Viererskalar.
Wir bringen nun die Kontinuitätsgleichung in Lorentz-invariante Form. Aus $\dot\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ folgt

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{24.19}$$

da $\partial j^0/\partial x^0 = \partial\rho/\partial t$. Wir betrachten nun die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{24.20}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24.21}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{24.22}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{24.23}$$

Man kann dann die Kontinuitätsgleichung als

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{24.24}$$

schreiben. Generell ist die Viererdivergenz $\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu$ eines Vierervektors P ein Viererskalar.

24.d Viererpotential

Wir fassen nun $\mathbf{A}$ und Φ zusammen zum Viererpotential

$$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A}), \tag{24.25}$$

dann gilt

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}j^\mu \tag{24.26}$$

in der Lorenz-Eichung mit der Eichbedingung

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot\Phi = 0 \to \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{24.27}$$

Dabei ist

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\partial_t^2 = -\partial_\mu \partial^\mu \tag{24.28}$$

ein Viererskalar $\Box' = \Box$.
Wir zeigen nun, dass die retardierte Lösung A_{r}^μ manifest Lorentz-invariant ist. Wir behaupten

$$A_{\mathrm{r}}^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4y j^\mu(y)\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(x^0 - y^0) \tag{24.29}$$

$$s^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = \mathrm{c}^2(t_y - t_x)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \tag{24.30}$$

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases} \tag{24.31}$$

Wir betrachten nun generell die Integration über eine δ-Funktion, die von einer Funktion f abhängt. Offensichtlich tragen nur die Nullstellen t_i von f bei,

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} g(t)\delta(f(t))dt \quad \text{mit} \quad f(t_i) = 0. \tag{24.32}$$

Mit $z = f(t)$, $dz = f'(t)dt$ folgt dann

$$\int g(t)\delta(f(t))dt = \sum_i \int_{-\epsilon/f'(t_i)}^{\epsilon/f'(t_i)} g(t_i)\delta(z)\frac{dz}{f'(t_i)} = \sum_i \frac{g(t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{24.33}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen in der δ-Funktion von (24.29) zu $t_y = t_x \pm |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/\mathrm{c}$ und die Ableitungen zu $f'(t_y) = \mathrm{c}^2(t_y - t_x) = \pm \mathrm{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, was

$$A_r^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4y j^\mu \delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t_x - t_y) = \int d^3y \frac{1}{\mathrm{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j^\mu(\mathbf{y}, t_x - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\mathrm{c}}) \tag{24.34}$$

ergibt. Wegen $\theta(t_x - t_y)$ erhalten wir die retardierte Lösung. Sie ist in Übereinstimmung mit (21.14) und (21.15). Ersetzen wir die θ-Funktion durch $\theta(t_y - t_x)$, so ergibt sich die avancierte Lösung. Man beachte, dass sich das Vorzeichen der Zeitdifferenz längs des Lichtkegels unter eigentlichen Lorentz-Transformationen nicht ändert.

25 Elektromagnetischer Feldtensor

25.a Feldtensor

Aus dem Viererpotential (A^μ) erhalten wir die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}}, \tag{25.1}$$

zum Beispiel

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3, \quad E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \tag{25.2}$$

Wir führen daher den elektromagnetischen Feldtensor ein

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{25.3}$$

Er ist antisymmetrisch. Explizit lautet er

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.4}$$

25.b Maxwell-Gleichungen

25.b.α Die inhomogenen Gleichungen

Die Gleichung $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ lässt sich ausdrücken

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^0. \tag{25.5}$$

Aus der 1-Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}$ folgt

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1 \rightarrow \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^1, \tag{25.6}$$

ähnlich für die anderen Komponenten. Diese vier Komponenten-Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.7}$$

Setzen wir die Darstellung der Felder durch die Potentiale ein, (25.3), so folgt

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{25.8}$$

Mit der Bedingung für die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, (24.27) folgt dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu \tag{25.9}$$

in Übereinstimmung mit (24.26) und (24.28).

25.b.β Die homogenen Gleichungen

Ähnlich kann man die homogenen Maxwell-Gleichungen umschreiben. Aus $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ wird

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \tag{25.10}$$

und aus $(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{B}})_{\mathrm{x}} = 0$ wird

$$-\partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23} = 0. \tag{25.11}$$

Diese Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{25.12}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \tag{25.13}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123} = 1$. Damit hat man explizit

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.14}$$

und (25.12) lässt sich schreiben

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{25.15}$$

Man überzeuge sich, dass ϵ ein Pseudoskalar ist, das heißt es gilt

$$\epsilon'^{\mu\nu\kappa\lambda} = \det(\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{25.16}$$

wobei $\det(\Lambda)$ gemäß der Diskussion nach (23.19) nur die Werte ± 1 annimmt und für eigentliche Lorentz-Transformationen gleich $+1$ ist (23.21).

25.c Transformation der elektrischen und magnetischen Felder

Da sich (∂^μ) und (A^ν) wie Vierer-Vektoren transformieren, gilt

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} \tag{25.17}$$

für die Transformation des elektromagnetischen Feldes. Wählen wir speziell

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

so folgt

$$E'_1 = F'^{10} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^0{}_\lambda F^{\kappa\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(E_1 - \beta B_2), \tag{25.19}$$

also

$$E'_1 = \gamma(E_1 - \frac{v}{\mathrm{c}} B_2), \tag{25.20}$$

ähnlich

$$B'_1 = \gamma(B_1 + \frac{v}{c}E_2) \tag{25.21}$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 + \frac{v}{c}B_1), \qquad B'_2 = \gamma(B_2 - \frac{v}{c}E_1) \tag{25.22}$$

$$E'_3 = E_3, \qquad B'_3 = B_3, \tag{25.23}$$

was wir auch zu

$$E'_\parallel = E_\parallel, \qquad B'_\parallel = B_\parallel, \qquad \text{Komponente } \parallel \mathbf{v} \tag{25.24}$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}), \qquad \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}), \qquad \text{Komponenten } \perp \mathbf{v} \tag{25.25}$$

zusammenfassen können.

25.d Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

Wir können daraus zum Beispiel die Felder einer Ladung, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt, berechnen. Im Ruhesystem S' der Ladung, die im Ursprung ist, gilt

$$\mathbf{E}' = q\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \tag{25.26}$$

Im System S gilt für die Ladung $x_q = y_q = 0$, $z_q = vt$. Wir drücken nun $\mathbf{r}'$ aus durch $\mathbf{r}$ und t und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \left(\frac{qx}{N}, \frac{qy}{N}, \frac{q\gamma(z-vt)}{N}\right), & (25.27)\\ \mathbf{B}' &= \mathbf{0}, & (25.28)\\ N &= r'^3 = (x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2)^{3/2}. & (25.29) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left.\begin{array}{r} E_1 = \gamma(E'_1 + \frac{v}{c}B'_2) = \frac{q\gamma x}{N} \\ E_2 = \gamma(E'_2 - \frac{v}{c}B'_1) = \frac{q\gamma y}{N} \\ E_3 = E'_3 = \frac{q\gamma(z-vt)}{N} \end{array}\right\} \mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{N} \tag{25.30}$$

$$\left.\begin{array}{r} B_1 = \gamma(B'_1 - \frac{v}{c}E'_2) = -\frac{q\gamma\beta y}{N} \\ B_2 = \gamma(B'_2 + \frac{v}{c}E'_1) = \frac{q\gamma\beta x}{N} \\ B_3 = B'_3 = 0 \end{array}\right\} \mathbf{B} = \frac{q\gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{r})}{cN}. \tag{25.31}$$

Flächen konstanten Ns sind in Bewegungsrichtung abgeplattete Rotations-Ellipsoide. Dabei ist kurze Halbachse / lange Halbachse $= 1/\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, also eine Verkürzung, wie sie auch bei der Längenkontraktion auftritt.

25.e Doppler-Effekt

Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\phi}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\phi} \quad \text{mit } \phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t. \tag{25.32}$$

Wir wissen, wie sich $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und damit auch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ transformieren. Es bleibt daher noch der Viererskalar der Phase ϕ zu betrachten. Schreiben wir

$$(k^\mu) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}), \tag{25.33}$$

so folgt

$$\phi = -k_\mu x^\mu. \tag{25.34}$$

Da (x^μ) ein beliebiger Vierervektor und ϕ ein Viererskalar sind, folgt, dass (k^μ) ein Vierervektor ist. Daher erhält man für die spezielle Lorentz-Transformation (25.18)

$$\omega' = ck'^0 = c\gamma(k^0 - \beta k^3) = \gamma(\omega - \beta c k^3), \quad k'^1 = k^1, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = \gamma(k^3 - \beta\frac{\omega}{c}). \tag{25.35}$$

Ist der Winkel zwischen z-Achse und Ausbreitungsrichtung θ, so gilt $k^3 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ und es folgt

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta). \tag{25.36}$$

Ist daher $\mathbf{v}$ parallel beziehungsweise antiparallel zur Ausbreitungs-Richtung, so hat man die longitudinale Doppler-Verschiebung

$$\theta = 0: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{25.37}$$

$$\theta = \pi: \quad \omega' = \omega\sqrt{\tfrac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{25.38}$$

Ist dagegen $\theta = \pi/2$ beziehungsweise $\theta' = \pi/2$, so hat man die transversale Doppler-Verschiebung

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \tfrac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.39}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2}: \quad \omega' = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25.40}$$

Dabei ist θ' der Winkel zwischen der z$'$-Achse und der Ausbreitungsrichtung in S'.

26 Relativistische Mechanik

26.a Lorentz-Kraftdichte

Die Kraftdichte lautet

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{26.1}$$

also zum Beispiel für die erste Komponente

$$k^1 = \rho E_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}(j^2 B_3 - j^3 B_2) = \frac{1}{\mathrm{c}}(j^0 F^{10} - j^2 F^{12} - j^3 F^{13}) = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{1\nu}. \tag{26.2}$$

Man führt daher den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{\mu\nu} \tag{26.3}$$

ein. Wir betrachten die zeitartige Komponente

$$k^0 = \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \tag{26.4}$$

Während die raumartigen Komponenten die mechanische Impulsänderung pro Zeit- und Volumen-Einheit angeben, gibt die zeitartige Komponente die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an

$$(k^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{k}). \tag{26.5}$$

26.b Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Die Vierer-Stromdichte am Ort $\mathbf{x}$ einer Punktladung q am Ort $\mathbf{x}_\mathrm{q}$ ist

$$j^\nu(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{q}(t)) v^\nu. \tag{26.6}$$

Daher ist die auf die Punktladung wirkende Kraft gegeben durch

$$K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} v_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.7}$$

Dies ist kein Vierer-Vektor, da (v^μ) kein Vierer-Vektor ist. Multiplizieren wir sie hingegen mit γ so erhält man einen Vierer-Vektor, die Minkowski-Kraft

$$\gamma K^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} u_\nu F^{\mu\nu}. \tag{26.8}$$

$\mathbf{K}$ ist der der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Impuls, $\mathrm{c}K^0$ die der Punktladung pro Zeiteinheit zugeführte Energie. Die Minkowski-Kraft ist dann der pro Eigenzeit zugeführte Impuls beziehungsweise die pro Eigenzeit zugeführte Energie durch c.

26.c Energie und Impuls eines Massenpunktes

Da Impulsänderung und Energieänderung durch c einen Vierervektor bilden, erwarten wir, dass auch mechanischer Impuls und Energie durch c einen Vierervektor bilden

$$(G^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}} E, \mathbf{G}). \tag{26.9}$$

Im Ruhesystem S' erwarten wir $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$, das heißt

$$(G'^\mu) = (\frac{1}{\mathrm{c}} E_0, \mathbf{0}). \tag{26.10}$$

Im System S ergibt sich mit der speziellen Transformation (23.23) für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & \quad \gamma \tfrac{v}{c^2} E_0 \mathbf{e}_z = & \gamma \mathbf{v} \frac{E_0}{c^2}, \qquad (26.11) \\ E = & \quad cG^0 = c\gamma G'^0 = & \gamma E_0. \qquad (26.12) \end{aligned}$$

Für Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit folgt

$$\mathbf{G} = \frac{E_0}{c^2} \mathbf{v} \big(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ...\big). \qquad (26.13)$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir

$$\mathbf{G}_{\text{Newton}} = m\mathbf{v} \qquad (26.14)$$

für einen Massenpunkt der Masse m. Für Geschwindigkeiten $v \ll$ c sollte der Impuls der Newtonschen und der relativistischen Mechanik übereinstimmen. Daraus folgt

$$m = \frac{E_0}{c^2} \to E_0 = mc^2, \quad \mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v}. \qquad (26.15)$$

Für die Energie E folgt dann

$$E = mc^2\gamma = mc^2 + \frac{m}{2} v^2 + O(v^4/c^2). \qquad (26.16)$$

Man ordnet dem Teilchen eine Ruheenergie $E_0 = mc^2$ zu. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt dazu der aus der Newtonschen Mechanik bekannte Beitrag $\frac{m}{2}v^2$ hinzu. Damit gilt

$$G^\mu = mu^\mu. \qquad (26.17)$$

Wir beobachten noch

$$G^\mu G_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2, \qquad (26.18)$$

woraus

$$-\mathbf{G}^2 + \frac{1}{c^2} E^2 = m^2 c^2, \quad E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{G}^2 c^2 \qquad (26.19)$$

folgt.
Solange die Teilchen erhalten bleiben, ist die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ nicht beobachtbar. Bei der Umwandlung von Teilchen wird sie jedoch beobachtet, zum Beispiel beim Zerfall eines Teilchens in zwei andere

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p^+. \qquad (26.20)$$

Mit den Massen

$$m_\Lambda = 2182 m_e, \quad m_\pi = 273 m_e, \quad m_p = 1836 m_e \qquad (26.21)$$

folgt für das vor dem Zerfall ruhende Λ die Energie- und Impuls-Bilanz

$$\begin{aligned} m_\Lambda c^2 &= \sqrt{m_\pi^2 c^4 + \mathbf{G}_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{G}_p^2 c^2} \qquad (26.22) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{G}_\pi + \mathbf{G}_p. \qquad (26.23) \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$|\mathbf{G}| = 4c\sqrt{M(m_\Lambda - M)(M - m_\pi)(M - m_p)}/m_\Lambda, \quad 2M = m_\Lambda + m_\pi + m_p. \qquad (26.24)$$

Mit Hilfe der Vierervektoren kann man aus

$$G_\Lambda{}^\mu = G_\pi{}^\mu + G_p{}^\mu \qquad (26.25)$$

nach G_p auflösen und quadrieren

$$G_p{}^{\mu} G_{p\mu} = (G^{\mu}_{\Lambda} - G^{\mu}_{\pi})(G_{\Lambda\mu} - G_{\pi\mu}) = G^{\mu}_{\Lambda} G_{\Lambda\mu} + G^{\mu}_{\pi} G_{\pi\mu} - 2 G^{\mu}_{\Lambda} G_{\pi\mu}. \tag{26.26}$$

Dies ergibt

$$m_p^2 \mathrm{c}^2 = m_{\Lambda}^2 \mathrm{c}^2 + m_{\pi}^2 \mathrm{c}^2 - 2 m_{\Lambda} E_{\pi} \tag{26.27}$$

und damit

$$E_{\pi} = \frac{\mathrm{c}^2}{2 m_{\Lambda}} \big(m_{\Lambda}^2 + m_{\pi}^2 - m_p^2 \big) \tag{26.28}$$

und analog

$$E_p = \frac{\mathrm{c}^2}{2 m_{\Lambda}} \big(m_{\Lambda}^2 - m_{\pi}^2 + m_p^2 \big). \tag{26.29}$$

26.d Bewegungsgleichung

Wir schreiben nun noch explizit die Bewegungsgleichung für Massenpunkte auf

$$\frac{dG^{\mu}}{dt} = K^{\mu}. \tag{26.30}$$

Wie wir früher schon bemerkten, ist die Gleichung nicht manifest Lorentz-invariant. Wir haben jedoch

$$\frac{dG^{\mu}}{d\tau} = \frac{dG^{\mu}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dG^{\mu}}{dt} = \gamma K^{\mu}, \tag{26.31}$$

wobei die rechte Seite wieder die Minkowski-Kraft ist. In dieser Form ist die Bewegungsgleichung manifest Lorentz-invariant.
Falls eine Kraft die Ruheenergie eines Teilchens nicht ändert, so folgt aus

$$G^{\mu} G_{\mu} = m^2 \mathrm{c}^2 \to \frac{d}{d\tau} (G^{\mu} G_{\mu}) = 0 \to G^{\mu} \gamma K_{\mu} = 0 \to u^{\mu} K_{\mu} = 0. \tag{26.32}$$

Die Kraft ist orthogonal zur Weltgeschwindigkeit. Als Beispiel dient die Lorentz-Kraft

$$u_{\mu} K^{\mu} = \frac{q}{\mathrm{c}} \gamma v_{\mu} v_{\nu} F^{\mu\nu} = 0, \tag{26.33}$$

da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Wir beobachten

$$v^{\mu} K_{\mu} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}} \frac{dE}{dt} = 0. \tag{26.34}$$

Die Gleichung (26.32) ist also äquivalent zu

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}, \tag{26.35}$$

die die der Masse zugeführte Leistung angibt.

27 Lagrange-Formulierung

27.a Lagrange-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

Wir behaupten, die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung q der Masse m im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{27.1}$$

Die Wirkung I kann dann

$$I = \int dt\mathcal{L} = -mc^2\int d\tau - \frac{q}{c}\int dt A^\mu \frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{27.2}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.
Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{27.3}$$

woraus mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{27.4}$$

dann

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{27.5}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $d\mathbf{A}/dt = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{27.6}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{27.7}$$

Also liefert die obige Lagrange-Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung.

27.b Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

Die Lagrange-Dichte L des elektromagnetischen Feldes eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\text{mech}}. \tag{27.8}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse m_i

$$L_{\text{mech}} = -\sum_i m_i c^3\int d\tau\delta^4(x - x_i(\tau)), \tag{27.9}$$

der nach Integration über d^4x den entsprechenden Anteil der Wirkung I in (27.1) ergibt. Der zweite Anteil in (27.8) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

$$j_\mu(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i\frac{dx_{i,\mu}}{dt}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \tag{27.10}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (27.1). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten Maxwell-Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

$$I = \frac{1}{\mathrm{c}} \int d^4x L(x) = \int dt \int d^3x L(\mathbf{x},t) = \int dt \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int d^3x L(\mathbf{x},t). \tag{27.11}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder A sein. Dabei betrachten wir F als Funktion von A (25.3), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich A

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu && (27.12)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (27.13)\\
F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu = 2 F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu && (27.14)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}} j_\nu \delta A^\nu. && (27.15)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach A

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4x \big(-\frac{1}{4\pi \mathrm{c}} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \delta A^\nu \big) \\
&= -\int d^4x \frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu (F_{\mu\nu} \delta A^\nu) + \int d^4x \big(\frac{1}{4\pi \mathrm{c}} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\mathrm{c}^2} j_\nu \big) \delta A^\nu. && (27.16)
\end{aligned}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} j^\nu. \tag{27.17}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ erfüllt. Generell erhält man für eine Lagrange-Dichte, die von einem Feld (A^μ) und deren Ableitungen abhängt, durch Variation

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\delta I &= \int d^4x \delta L(x) \\
&= \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) + \frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \partial^\mu \delta A^\nu(x) \right) \\
&= \int d^4x \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \delta A^\nu(x) \right) + \int d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) \right) \delta A^\nu(x). && (27.18)
\end{aligned}$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen von L nach A beziehungsweise ∂A mit $\delta L/\delta ...$ zu bezeichnen. Da die Variation verschwinden muss, folgen allgemein die Bewegungsgleichungen

$$\partial^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^\mu A^\nu(x)} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = 0. \tag{27.19}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (27.3) auf Felder. Neben der Zeitableitung von $\delta L/\delta \dot{A}^\nu$ treten auch die räumlichen Ableitungen von $\delta L/\delta \nabla A^\nu$ auf.

28 Energie-Impuls-Tensor und Erhaltungsgrößen

28.a Der Tensor

Im Abschnitt 15.b hatten wir aus der Dichte der Lorentz-Kraft einen Erhaltungssatz für den Impuls des elektromagnetischen Feldes "im Vakuum", das heißt ohne Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge in Materie hergeleitet

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha, \tag{28.1}$$

$$\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{28.2}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\big(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta\big) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.3}$$

Als nullte Komponente müssen wir die Energiedichte betrachten. Für diese hatten wir in Abschnitt 15.a gefunden

$$-k^0 = -\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\mathbf{S} + \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{u} \tag{28.4}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{28.5}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\big(E^2+B^2\big). \tag{28.6}$$

Wir fassen zusammen

$$-k^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.7}$$

mit dem elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_1 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_2 & -\frac{1}{\mathrm{c}}S_3 \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}1} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}2} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -\mathrm{c}g_{\mathrm{s}3} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{28.8}$$

Man beobachtet, dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, da $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und $\mathrm{c}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \tag{28.9}$$

gilt, entweder durch explizites Auswerten und Vergleich oder aus

$$k^\mu = \frac{1}{\mathrm{c}}j_\lambda F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}(\partial^\nu F_{\nu\lambda})F^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi}\partial^\nu(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}) - \frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda}. \tag{28.10}$$

Nun folgt aus

$$F_{\nu\lambda}\big(\partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\nu\mu}\big) = 0 \tag{28.11}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) + 2F_{\nu\lambda}\partial^\nu F^{\mu\lambda} = 0, \tag{28.12}$$

so dass wir schließlich

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{1}{4\pi}\partial^\nu\big(F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}\big) + \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\big(F_{\nu\lambda}F^{\lambda\nu}\big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_\nu\big(-F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^\kappa{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\big) \end{aligned} \tag{28.13}$$

erhalten. $T^{\mu\nu}$ ist ein Vierer-Tensor, das heißt er transformiert sich gemäß

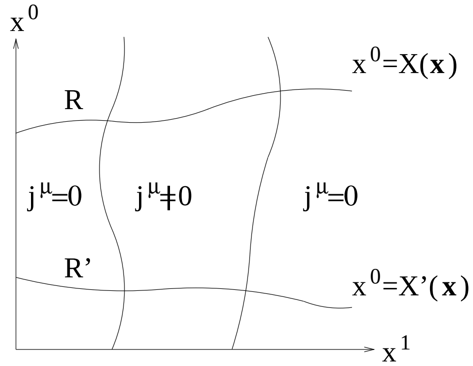
$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\lambda T^{\kappa\lambda}. \tag{28.14}$$

28.b Erhaltungssätze

Wir gehen aus von einem Vierervektorfeld $(j^\mu(x))$. In jedem dreidimensionalen raumartigen Unterraum R des vierdimensionalen Raums sei (j^μ) nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Mit raumartig bezeichnen wir einen Raum, wenn je zwei Punkte des Raumes einen raumartigen Abstand haben. Eine Weltlinie, das heißt eine Linie, die überall Unterlichtgeschwindigkeit hat, durchstößt einen raumartigen Unterraum in genau einem Punkt. Trägt man den Unterraum als $x^0(\mathbf{r})$ auf, so ist die Steigung stets kleiner 1. Für die Weltlinie ist die Steigung dagegen überall größer 1. Die Punkte konstanter Zeit eines Inertialsystems bilden zum Beispiel einen raumartigen Raum. Wir integrieren nun die Divergenz $\partial_\mu j^\mu$ über das vierdimensionale Volumen Ω, das von zwei raumartigen Räumen R und R' begrenzt wird und erhalten

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) - \int_{R'} d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X'}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big). \tag{28.15}$$

Den Beitrag $\partial_\mu j^\mu$ integriert man einfach in x^μ-Richtung bis zur Begrenzung R beziehungsweise R' oder bis j^μ verschwindet. Für die 0-Komponente ergibt das unmittelbar den angegebenen Beitrag. Für die 1-Komponente bleibt zunächst das Integral $\pm \int dx^0 dx^2 dx^3 j^1$ an der Berandung.Die dx^0-Integration lässt sich aber in eine $dx^1 \frac{\partial X}{\partial x^1}$-Integration umformen. Wächst (fällt) $X = x^0$ auf der Berandung mit x^1, so handelt es sich um die untere (obere) Grenze der Integration. Daher das Minus-Zeichen vor $\frac{\partial X}{\partial x^1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Raumkomponenten.Wir können uns auch noch davon überzeugen, dass



$$\int_R d^3x \big(j^0 - \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} j^\alpha\big) = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.16}$$

mit $(dV_\mu) = (1, -\nabla X) d^3x$ ein Viererskalar ist. Führen wir nämlich einen Vierervektor $(\bar{j}^\mu)$ so ein, dass

$$\bar{j}^\mu = \begin{cases} j^\mu & \text{in } R \\ 0 & \text{in } R' \end{cases}, \tag{28.17}$$

so folgt

$$\int_R dV_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu \bar{j}^\mu = \int_\Omega d^4x \frac{\partial \bar{j}^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{28.18}$$

wobei letzteres Integral offensichtlich ein Viererskalar ist, da sowohl d^4x wie auch die Vierer-Divergenz von $\bar{j}$ ein Viererskalar ist. Da aber das Feld (j^μ) beliebig ist, gilt für jedes infinitesimale (dV_μ) aus R, dass $dV_\mu j^\mu$ ein Viererskalar ist. Da (j^μ) Vierervektor ist, muss auch (dV^μ) Vierervektor sein. Damit können wir (28.16) schreiben als

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_R dV_\mu j^\mu - \int_{R'} dV_\mu j^\mu. \tag{28.19}$$

Dies ist der Gaußsche Satz in vier Dimensionen.
Wir ziehen nun Folgerungen daraus:

28.b.α Ladung

(j^μ) sei der Viererstrom der Ladungsdichte. Aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt für jedes raumartige R der gleiche Wert

$$q = \int_R dV_\mu j^\mu \tag{28.20}$$

für die Ladung, da das Integral der Divergenz über Ω in (28.19) verschwindet (da der Integrand verschwindet), und da man immer das gleiche R' wählen kann. Die Ladung ist daher eine Erhaltungsgröße, genauer gesagt haben wir konsistentes Verhalten gefunden, denn wir haben bereits in Unterabschnitt 24.c angenommen, dass die Ladung erhalten ist. Neu ist, dass ihre Bestimmung in einem beliebigen dreidimensionalen Unterraum möglich ist.

28.b.β Energie und Impuls

Aus

$$k^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.21}$$

folgt

$$\int_\Omega d^4x k^\mu = \int_R dV_\nu T^{\mu\nu} - \int_{R'} dV_\nu T^{\mu\nu}. \tag{28.22}$$

In einem ladungsfreien Raum ($k^\mu = 0$), das heißt für freie elektromagnetische Wellen gilt dann, dass die Komponenten des Strahlungs-Impulses

$$G_{\rm s}^\mu = -\frac{1}{\rm c}\int_R dV_\nu T^{\mu\nu} \tag{28.23}$$

unabhängig von R sind. Sie sind also erhalten. Es sei nun (b_μ) ein beliebiger konstanter Vierervektor. Dann ist $b_\mu T^{\mu\nu}$ ein Vierervektor und $\partial_\nu(b_\mu T^{\mu\nu}) = 0$. Damit wird dann $b_\mu G_{\rm s}^\mu$ zum Viererskalar und $G_{\rm s}^\mu$ ist ein Vierervektor.
Sind nun im Vierervolumen Ω Ladungen, so gilt

$$G_{\rm s}^\mu(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x k^\mu + G_{\rm s}^\mu(R'). \tag{28.24}$$

Für Punktladungen q_i hat man (26.7, 26.30)

$$\frac{1}{\rm c}\int d^4x k^\mu = \sum_i \int dt K_i^\mu = \sum_i \int dt \dot{G}_i^\mu = G_i^\mu(R) - G_i^\mu(R'). \tag{28.25}$$

Dabei ist $G_i^\mu(R) = m_i u_i^\mu(R)$ der Vierer-Impuls der Ladung $\#i$ an der Stelle, an der die Weltlinie der Ladung den Unterraum R durchstößt. Damit ist

$$G^\mu = G_{\rm s}^\mu(R) + \sum_i G_i^\mu(R) \tag{28.26}$$

der erhaltene Vierer-Impuls.

28.b.γ Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung

Aus (28.7) folgt

$$\partial_\nu\big(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}\big) = x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda + T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}. \tag{28.27}$$

Da der Tensor T symmetrisch ist, kürzen sich die beiden letzten Terme weg. Wir führen den Tensor

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_R dV_\nu(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\lambda\nu}) \tag{28.28}$$

ein. Er ist antisymmetrisch $M_{\rm s}^{\lambda\mu} = -M_{\rm s}^{\mu\lambda}$. Auf Grund von (28.19) gilt

$$M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R) = -\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) + M_{\rm s}^{\lambda\mu}(R'). \tag{28.29}$$

Für Punktladungen erhält man

$$\frac{1}{\rm c}\int_\Omega d^4x\big(x^\lambda k^\mu - x^\mu k^\lambda\big) = \sum_i \int dt\big(x_i^\lambda K_i^\mu - x_i^\mu K_i^\lambda\big) = \sum_i \int dt \frac{d}{dt}\big(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\big), \tag{28.30}$$

da $\dot{x}^\lambda G^\mu = \dot{x}^\mu G^\lambda$. Daher ist

$$M^{\lambda\mu}(R) = M_{\mathrm{s}}^{\lambda\mu}(R) + M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) \tag{28.31}$$

mit dem mechanischen Anteil

$$M_{\mathrm{m}}^{\lambda\mu}(R) = \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right)\big|_R \tag{28.32}$$

eine Erhaltungsgröße, das heißt $M^{\lambda\mu}(R)$ ist unabhängig von der Wahl von R. Zugleich ist $(M^{\lambda\mu})$ ein Vierertensor.
Es bleibt noch die Bedeutung von M zu bestimmen. Hierzu betrachten wir M in dem dreidimensionalen Raum R, der durch die konstante Zeit t im Inertialsystem S gegeben ist. Wir haben dann

$$M^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int d^3x \big(x^\lambda T^{\mu 0} - x^\mu T^{\lambda 0}\big) + \sum_i \left(x_i^\lambda G_i^\mu - x_i^\mu G_i^\lambda\right) \tag{28.33}$$

Wir betrachten zunächst die raumartigen Komponenten

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x \big(x^\alpha g_{\mathrm{s}}^\beta - x^\beta g_{\mathrm{s}}^\alpha\big) + \sum_i \left(x_i^\alpha G_i^\beta - x_i^\beta G_i^\alpha\right). \tag{28.34}$$

Dies ist für $\alpha \neq \beta$ eine Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}$, nämlich $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$. Wir haben damit die Erhaltung des Drehimpulses gefunden.
Ist eine Komponente zeitartig, so erhält man

$$M^{0\alpha} = \mathrm{c}t\Big(\int d^3x g_s^\alpha + \sum_i G_i^\alpha\Big) - \frac{1}{\mathrm{c}}\Big(\int d^3x x^\alpha u + \sum_i x_i^\alpha E_i\Big). \tag{28.35}$$

Der erste Beitrag stellt $\mathrm{c}t$ multipliziert mit dem Gesamtimpuls dar. Der zweite Beitrag ist die Summe aller Energien dividiert durch c multipliziert mit der Ortskoordinate x^α. Man kann diesen zweiten Beitrag als den Energie-Schwerpunkt (tatsächlich die α-Komponente davon) multipliziert mit der Gesamtenergie dividiert durch c auffassen. Da Gesamtimpuls und Energie konstant sind, heißt das, dass sich der Energie-Schwerpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathrm{c}^2 \frac{\text{Gesamtimpuls}}{\text{Gesamtenergie}}$ bewegt. Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten reduziert sich der mechanische Anteil auf

$$M_{\mathrm{m}}^{0\alpha} = \mathrm{c}\left(t\sum_i G_i^\alpha - \sum_i m_i x_i^\alpha\right). \tag{28.36}$$

Die Erhaltung dieser Größe beinhaltet die gleichförmige Bewegung des Massenschwerpunkts mit der Geschwindigkeit Gesamtimpuls durch Gesamtmasse. Relativistisch geht das in die gleichförmige Bewegung des Energieschwerpunktes über. Die Lorentz-Invarianz verknüpft diese Erhaltung mit der Erhaltung des Drehimpulses zur Erhaltung des antisymmetrischen Tensors M.

29 Feld einer beliebig bewegten Punktladung

29.a Liénard-Wiechert-Potential

Wir bestimmen zunächst das Potential am Punkt (x^μ) einer Punktladung q, die sich auf einer Weltlinie $\mathbf{r}_\mathrm{q}(t)$ bewegt. Ihre Viererstromdichte ist

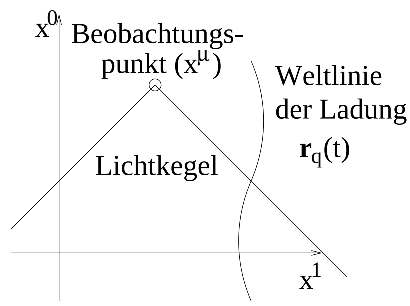
$$j^\mu(x') = qv^\mu\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mathrm{q}(t)), \quad v^\mu = (\mathrm{c}, \dot{\mathbf{r}}_\mathrm{q}(t)). \tag{29.1}$$

Das Viererpotential ergibt sich dann nach (24.29) zu

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^4x' j^\mu(x')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') = q\int dt' v^\mu(t')\delta(\frac{1}{2}s^2)\theta(t-t') \tag{29.2}$$

mit

$$s^2 = a^\nu a_\nu, \quad a^\nu = x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t'). \tag{29.3}$$



(a^ν) ist eine Funktion von (x^ν) und t'. Das Differential von $\frac{1}{2}s^2$ ergibt sich zu

$$d(\frac{1}{2}s^2) = a_\nu da^\nu = a_\nu dx^\nu - a_\nu v^\nu dt'. \tag{29.4}$$

Damit erhält man das retardierte Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu(x) = qv^\mu(t')\frac{1}{|\frac{\partial\frac{1}{2}s^2}{\partial t'}|} = \left.\frac{qv^\mu}{a_\nu v^\nu}\right|_\mathrm{r} = \left.\frac{qu^\mu}{a_\nu u^\nu}\right|_\mathrm{r}. \tag{29.5}$$

Dabei sind die beiden Ausdrücke mit dem Index $_\mathrm{r}$ zu der Zeit t' auszuwerten, zu der $s^2 = 0$ und $t > t'$. Wir beachten, dass $a_\nu v^\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} > 0$, da $a = \mathrm{c}(t-t') = |\mathbf{a}|$. Im momentanen Ruhesystem der Ladung ist $a_\nu u^\nu/\mathrm{c}$ der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ladung.

29.b Die Felder

Aus den Potentialen berechnen wir nun die Felder

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{29.6}$$

Hierzu müssen wir die Ableitungen von v, a und t' bilden

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.7}$$

$$\partial^\mu a^\nu = \partial^\mu(x^\nu - x^\nu_\mathrm{q}(t')) = g^{\mu\nu} - v^\nu\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} \tag{29.8}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_\mu} = \frac{a^\mu}{(a\cdot v)}, \tag{29.9}$$

wobei der letzte Ausdruck wegen $s^2 = 0$ aus (29.4) gewonnen wurde. Hier und im Folgenden verwenden wir

$$(a\cdot v) = a^\nu v_\nu = a\mathrm{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{c}(a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta}) \tag{29.10}$$

$$(v\cdot v) = v^\nu v_\nu = \mathrm{c}^2 - v^2 = \mathrm{c}^2(1-\beta^2) \tag{29.11}$$

$$(a\cdot\dot{v}) = a^\nu\dot{v}_\nu = -\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{v}}. \tag{29.12}$$

Damit wertet man aus

$$\partial^\mu v^\nu = \frac{\dot v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.13}$$

$$\partial^\mu a^\nu = g^{\mu\nu} - \frac{v^\nu a^\mu}{(a\cdot v)} \tag{29.14}$$

$$\begin{aligned}
\partial^\mu (a\cdot v) &= (\partial^\mu a^\kappa) v_\kappa + a_\kappa (\partial^\mu v^\kappa) \\
&= g^{\mu\kappa} v_\kappa - \frac{v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)} v_\kappa + a_\kappa \frac{\dot v^\kappa a^\mu}{(a\cdot v)} \\
&= v^\mu - a^\mu \frac{(v\cdot v)}{(a\cdot v)} + a^\mu \frac{(a\cdot \dot v)}{(a\cdot v)}.
\end{aligned} \tag{29.15}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned}
\partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu \left(q\frac{v^\nu}{(a\cdot v)}\right) = q\frac{\partial^\mu v^\nu}{(a\cdot v)} - q\frac{v^\nu \partial^\mu (a\cdot v)}{(a\cdot v)^2} \\
&= a^\mu b^\nu - q\frac{v^\mu v^\nu}{(a\cdot v)^2},
\end{aligned} \tag{29.16}$$

$$b^\nu = q\frac{v^\nu (v\cdot v) - v^\nu (a\cdot \dot v) + \dot v^\nu (a\cdot v)}{(a\cdot v)^3}. \tag{29.17}$$

Damit ist

$$(b^\nu) = \frac{q}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left(1-\beta^2 + \frac{\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\beta}(1-\beta^2) + \frac{1}{\mathrm{c}}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\mathrm{c}}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{29.18}$$

und die Felder stellen sich dar

$$F^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu \tag{29.19}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} b^0 - a\mathbf{b} = \frac{q(1-\beta^2)(\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta} a)}{(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q\mathbf{a}\times((\mathbf{a}-\boldsymbol{\beta} a)\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{\mathrm{c}(a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \tag{29.20}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{E}}{a} \tag{29.21}$$

Der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ fällt ab wie $1/a$, für diesen Beitrag bilden $\mathbf{a}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ein Orthogonal-System. Der von $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ unabhängige Beitrag fällt wie $1/a^2$ ab.

29.c Gleichförmige Bewegung

(vergleiche Abschnitt 25.d). Der Skalar $\gamma a^\lambda v_\lambda/\mathrm{c}$ ist gerade der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Ort der Ladung im Ruhesystem der Ladung. Daher gilt

$$a - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma}|\mathbf{r}'|, \quad (a-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 = N/\gamma^3. \tag{29.22}$$

Berücksichtigt man $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t'$, $a = c(t-t')$, so folgt

$$\mathbf{a} - \boldsymbol{\beta} a = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{29.23}$$

und damit

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{N}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{v}t')\times(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)q\gamma}{c(t-t')N} = \frac{q\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{\mathrm{c}N} \tag{29.24}$$

in Übereinstimmung mit (25.30) und (25.31).

29.d Beschleunigte Ladung momentan in Ruhe

Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (29.20) und (29.21) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q\mathbf{a}}{a^3} + \frac{q}{ca^3}\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) && (29.25) \\ \mathbf{B} &= -\frac{q}{ca^2}(\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}), && (29.26) \end{aligned}$$

woraus mit der Energiestromdichte $\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

$$\frac{d\dot{U}_\mathrm{s}}{d\Omega} = a^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{\mathrm{c}a}{4\pi}[\mathbf{a},\mathbf{E},\mathbf{B}] = \frac{q^2}{4\pi \mathrm{c}a^2}(\mathbf{a} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{q^2}{4\pi\mathrm{c}^3}(\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})^2 \tag{29.27}$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{29.28}$$

(Larmor-Formel) folgt.
Für eine harmonische Bewegung $\mathbf{r}_\mathrm{q} = \mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\cos(\omega t)$ und $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}\omega^2\cos(\omega t)$ folgt

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2\mathbf{r}_{0\mathrm{q}}^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4(\cos(\omega t))^2, \quad \overline{\dot{U}_\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{\mathrm{c}^3}\omega^4 \tag{29.29}$$

in Übereinstimmung mit Abschnitt 22.b. Dies gilt für $\beta \ll 1$. Sonst hat man in 22.b auch Quadrupol- und höhere Multipolanteile zu berücksichtigen und hier, dass β nicht mehr vernachlässigt werden kann, was auf zusätzliche Beiträge der Ordnung ω^6 und höher führt.

29.e Abstrahlung, $\beta \neq 0$

Wir hatten gesehen, dass die Ladung im momentanen Ruhesystem die Leistung $\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\dot{\mathbf{v}}^2$ abstrahlt. Der abgestrahlte Impuls ist Null wegen der Symmetrie der Strahlung (ohne Berücksichtigung des statischen Anteils von $\mathbf{E}$, der aber so rasch abnimmt, dass er für hinreichend großes a nichts mehr beiträgt)

$$\mathbf{E}(-\mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{B}(-\mathbf{a}) = -\mathbf{B}(\mathbf{a}), \quad T_{\alpha\beta}(-\mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}). \tag{29.30}$$

Wir können daher den pro Eigenzeit abgestrahlten Impuls-Energie-Vektor schreiben als

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{c}}U_\mathrm{s}, \mathbf{G}_\mathrm{s}\right) = \frac{u^\mu}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(-\frac{du^\lambda}{d\tau}\frac{du_\lambda}{d\tau}\right), \tag{29.31}$$

da $\dot{u}^0 = \mathrm{c}\dot{\gamma} \propto \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$. Da die Formel lorentz-invariant geschrieben ist, gilt sie in jedem Inertialsystem, das heißt

$$\begin{aligned} \frac{dU_\mathrm{s}}{dt} &= \frac{d\tau}{dt}\frac{u^0}{\mathrm{c}}\frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(-\frac{d(\gamma v^\lambda)}{dt}\frac{d(\gamma v_\lambda)}{dt}\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left((\gamma\mathbf{v})^{\cdot}(\gamma\mathbf{v})^{\cdot} - \mathrm{c}^2\dot{\gamma}^2\right) \\ &= \frac{2q^2}{3\mathrm{c}^3}\gamma^2\left(\gamma^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) + \dot{\gamma}^2(\mathbf{v}^2 - \mathrm{c}^2)\right). && (29.32) \end{aligned}$$

Mit $d\tau/dt \cdot u^0/\mathrm{c} = 1$ und

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}}\right) = \gamma^3\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2} \tag{29.33}$$

folgt schließlich

$$\dot{U}_\mathrm{s} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\mathrm{c}^3}\left(\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^6\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{\mathrm{c}^2}\right). \tag{29.34}$$

Beim Umlaufen in einem Synchrotron vom Radius r ist die Beschleunigung $\dot{v} = v^2/r$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daraus folgt

$$\dot{U}_{\rm s} = \frac{2}{3} q^2 {\rm c} \beta^4 \gamma^4 / r^2 = \frac{2}{3} q^2 {\rm c} (\gamma^2 - 1)^2 / r^2. \tag{29.35}$$

Pro Umlauf ist die abgestrahlte Energie

$$\Delta U_{\rm s} = \frac{2\pi r}{v} \dot{U}_{\rm s} = \frac{4\pi}{3} q^2 \beta^3 \gamma^4 / r. \tag{29.36}$$

Bei Desy ergibt sich für ein umlaufendes Elektron der Energie E =7.5 GeV und $m_{\rm e}{\rm c}^2$ =0.5 MeV ein Wert $\gamma = E/(m_{\rm e}{\rm c}^2) = 15000$. Für $r = 32$ m folgt dann $\Delta U = 9.5$ MeV. Bei Petra hat man mit $E = 19$GeV ein $\gamma = 38000$ und mit $r = 367$m eine Energieabstrahlung von $\Delta U = 34$MeV pro Umlauf.
Aufgabe Hera bei Desy hat $r = 1008$m und arbeitet mit Elektronen von $E_{\rm e} = 30$GeV und Protonen von $E{\rm p} = 820$GeV. Man berechne deren Energieabstrahlung pro Umlauf.

Anhänge

A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik

Neben dem Gaußschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet.
Während das Gaußsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ J} = 1 \text{ W s} = 1 \text{ A V s}. \tag{A.1}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = \mathrm{c}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A.2}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
Gauß	1	1	c	1
Elektrostatisch (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch (emu)	c^{-2}	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
Giorgi (SI)	$(\mathrm{c}^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die Feldstärken im Gaußschen Maßsystem drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* && \text{analog elektrisches Potential} \\
\mathbf{D} &= \sqrt{\psi/\epsilon_0}\mathbf{D}^* && \\
\mathbf{P} &= 1/\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{P}^* && \text{analog Ladung, Strom und deren Dichten, elektrische Momente} \\
\mathbf{B} &= \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* && \text{analog Vektorpotential, magnetischer Fluss} \\
\mathbf{H} &= \sqrt{\psi\mu_0}\mathbf{H}^* && \\
\mathbf{M} &= \sqrt{\mu_0/\psi}\mathbf{M}^* && \text{analog magnetische Momente}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Für die mit Leitfähigkeit und Widerstand verknüpften Größen gilt

$$\begin{aligned}
\sigma &= 1/(\psi\epsilon_0)\sigma^* && \text{analog Kapazität} \\
R &= \psi\epsilon_0 R^* && \text{analog Induktivität}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Für die elektrische und magnetische Suszeptibilität gilt

$$\chi = \chi^*/\psi. \tag{A.5}$$

Wir erhalten damit die folgenden Gleichungen für beliebige Maßsysteme (d.h. der * ist jetzt weggelassen): Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten dann

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}(\dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{j}_\mathrm{f}), \tag{A.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\psi}\rho_\mathrm{f}, \tag{A.7}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma}\dot{\mathbf{B}}, \tag{A.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{A.9}$$

Für die Materialgleichungen folgt

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{P}, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{M}. \tag{A.11}$$

Für die Lorentz-Kraft folgt

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\gamma}) \tag{A.12}$$

Für die Energiedichte u und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ folgen

$$u = \frac{\psi}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}), \tag{A.13}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\psi\gamma}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{A.14}$$

Während im Gaußschen System alle Feldgrößen $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in der Einheit

$$\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm} = \sqrt{\mathrm{erg}/\mathrm{cm}^3} \tag{A.15}$$

gemessen werden, werden im Giorgi-System $\mathbf{E}$ in V/m, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{P}$ in As/m^2, $\mathbf{B}$ in Vs/m^2, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in A/m gemessen. Je nach Feldgröße entspricht 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} im Gaußschen System den folgenden Werten im Giorgi-System (analog für die weiteren in (A.3) und (A.4) angegebenen Größen)

$$\mathbf{E} = 3\cdot 10^4 \text{ V/m} \tag{A.16}$$

$$\mathbf{D} = 10^{-5}/(12\pi) \text{ As/m}^2 \tag{A.17}$$

$$\mathbf{P} = 10^{-5}/3 \text{ As/m}^2 \tag{A.18}$$

$$\mathbf{B} = 10^{-4} \text{ Vs/m}^2 \tag{A.19}$$

$$\mathbf{H} = 10^3/(4\pi) \text{ A/m} \tag{A.20}$$

$$\mathbf{M} = 10^3 \text{ A/m}. \tag{A.21}$$

Für Widerstände gilt c$^{-1}\hat{=}30\Omega$. Für genaue Berechnungen sind die Faktoren 3 (auch die 3 in $12 = 4\cdot 3$) durch den Faktor 2.99792458 zu ersetzen. Diese Zahl multipliziert mit 10^8 m/s ist die Lichtgeschwindigkeit.
Für folgende vielgebrauchte Einheiten im Gaußschen und im elektromagnetischen System sind eigene Namen üblich:

magnetische Induktion	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 G (Gauß)
magnetische Feldstärke	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 Oe (Oerstedt)
magnetischer Fluss	1 dyn$^{1/2}$ cm =1 Mx (Maxwell)

Im SI-System haben außer Ampere und Volt folgende Größen einen eigenen Namen:

Ladung	1 As	=1 C (Coulomb)
Widerstand	1 V/A	=1 Ω (Ohm)
Leitwert	1 A/V	=1 S (Siemens)
Kapazität	1 As/V	=1 F (Farad)
Induktivität	1 Vs/A	=1 H (Henry)
magnetischer Fluss	1 Vs	=1 Wb (Weber)
magnetische Induktion	1 Vs/m^2	=1 T (Tesla).

B Formeln zur Vektorrechnung

Der Leser möge die Aufgaben B.11, B.15, B.34-B.50 und die Aufgabe nach B.71 selbst lösen oder die Ergebnisse dem Skriptum an anderer Stelle entnehmen.

B.a Vektoralgebra

B.a.α Summationskonvention und orthonormale Basis

Wir verwenden die Summationskonvention, die besagt, daß über alle Indices, die zweimal in einem Produkt auftreten, summiert wird. Daher steht

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

für

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der Zerlegung (B.1) ein orthonormales und ortsunabhängiges Rechtssystem darstellen. Dann sind a_1, a_2, a_3 die Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

B.a.β Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt gilt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

insbesondere

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha = \beta \\ 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

mit dem gegen Vertauschen der Indices symmetrischen Kronecker-Symbol $\delta_{\alpha,\beta}$, und

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

B.a.γ Vektorielles Produkt

Für das vektorielle Produkt gilt

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{für } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{für } (\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.6}$$

Mit Determinanten schreibt man

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha,1} & \delta_{\beta,1} & \delta_{\gamma,1} \\ \delta_{\alpha,2} & \delta_{\beta,2} & \delta_{\gamma,2} \\ \delta_{\alpha,3} & \delta_{\beta,3} & \delta_{\gamma,3} \end{vmatrix}. \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation mit a_α, b_β und $\mathbf{e}_\gamma$ und Ausführen der Summe erhält man aus (B.5)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{B.9}$$

und

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\gamma. \tag{B.10}$$

Man drücke die Summe

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\zeta,\eta,\gamma} = \tag{B.11}$$

mit Hilfe von Kronecker-Deltas aus.

B.a.δ Mehrfachprodukte

Für das Spatprodukt gilt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{B.12}$$

Es ist

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]. \tag{B.13}$$

Für das Dreifach-Produkt folgt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{B.14}$$

Man drücke das Vierfach-Produkt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \tag{B.15}$$

mit Hilfe von (B.11) oder (B.14) durch Skalarprodukte aus.

B.b Vektoranalysis

B.b.α Räumliche Differentiation, Nabla-Operator

Die räumliche Differentiation wird mit dem Nabla-Operator ∇ durchgeführt. Er ist ein Differential-Operator mit Vektoreigenschaften, in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

wobei ∂_α für $\partial/\partial x_\alpha$ steht. Man bezeichnet

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

als Gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r}) \operatorname{grad})\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

als Vektorgradient,

$$\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

als Divergenz und

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\gamma = \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

als Rotation.

B.b.β Zweifache Ableitung, Laplace-Operator

Soweit die Differentiationen vertauschbar sind, gilt

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

woraus

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, && \text{(B.22)} \\ \text{div rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{(B.23)} \end{aligned}$$

folgt. Das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

wird als Laplace-Operator bezeichnet. Daher ist

$$\text{div grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

Man findet

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{ grad div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

indem man in (B.14) **a** and **b** durch ∇ ersetzt und den Vektor **c** stets auf die rechte Seite schafft.

B.b.γ Ableitung von Produkten

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf Produkte von zwei Faktoren erhält man gemäß der Produkt-Regel zwei Summanden, indem man einmal den ersten Faktor differenziert und den zweiten konstant hält, und zum zweiten den zweiten Faktor differenziert und den ersten festhält. Dann formt man unter Berücksichtigung des Vektor-Charakters des Nabla-Operators die Ausdrücke so um, dass die konstant gehaltenen Faktoren links, die zu differenzierenden rechts vom Nabla-Operator stehen. Man findet

$$\begin{aligned} \text{grad}\,(\Phi\Psi) &= \Phi\,\text{grad}\,\Psi + \Psi\,\text{grad}\,\Phi && \text{(B.27)} \\ \text{div}\,(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi\,\text{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\,\text{grad}\,\Phi && \text{(B.28)} \\ \text{rot}\,(\Phi\mathbf{a}) &= \Phi\,\text{rot}\,\mathbf{a} + (\,\text{grad}\,\Phi) \times \mathbf{a} && \text{(B.29)} \\ \text{div}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\,\text{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\,\text{rot}\,\mathbf{b} && \text{(B.30)} \\ \text{rot}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\,\text{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\text{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\,\text{grad}\,)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\,\text{grad}\,)\mathbf{b} && \text{(B.31)} \\ \text{grad}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times\,\text{rot}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\,\text{rot}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\,\text{grad}\,)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\,\text{grad}\,)\mathbf{b} && \text{(B.32)} \\ \triangle(\Phi\Psi) &= \Phi\triangle\Psi + \Psi\triangle\Phi + 2(\,\text{grad}\,\Phi)\cdot(\,\text{grad}\,\Psi). && \text{(B.33)} \end{aligned}$$

B.c Spezielle Ausdrücke

Man bestimme für $r = |\mathbf{r}|$ und für konstanten Vektor **c**

$$\begin{aligned} \text{grad}\,r^2 &= && \text{(B.34)} \\ \text{div}\,\mathbf{r} &= && \text{(B.35)} \\ \text{rot}\,\mathbf{r} &= && \text{(B.36)} \\ \text{grad}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= && \text{(B.37)} \\ (\mathbf{c}\,\text{grad}\,)\mathbf{r} &= && \text{(B.38)} \\ \text{grad}\,f(r) &= && \text{(B.39)} \\ \text{div}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.40)} \\ \text{rot}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= && \text{(B.41)} \\ \text{grad}\,\frac{1}{r} &= && \text{(B.42)} \\ \text{div}\,\frac{\mathbf{c}}{r} &= && \text{(B.43)} \end{aligned}$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{c}}{r} = \tag{B.44}$$

$$\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.45}$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.46}$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.47}$$

$$\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.48}$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.49}$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} = \quad , \tag{B.50}$$

wobei singuläre Punkte auszunehmen seien.

B.d Integral-Sätze

B.d.α Linien-Integrale

Für ein skalares oder vektorielles Feld $A(\mathbf{r})$ gilt

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r}\nabla)A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_2) - A(\mathbf{r}_1), \tag{B.51}$$

das heißt

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1), \tag{B.52}$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (d\mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1). \tag{B.53}$$

B.d.β Flächen-Integrale

Nach Stokes lässt sich ein Flächenintegral über die Fläche F der Form

$$\int_F (d\mathbf{f}\times\nabla)A(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r}A(\mathbf{r}) \tag{B.54}$$

in ein Linienintegral über den Rand ∂F umformen, wobei das Linienintegral im Rechtschraubensinn zur Richtung von $d\mathbf{f}$ zu führen ist (Korkenzieherregel). Insbesondere folgt

$$\int_F d\mathbf{f}\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.55}$$

$$\int_F d\mathbf{f}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.56}$$

B.d.γ Volumen-Integrale

Nach Gauß lässt sich ein Volumenintegral der Form

$$\int_V d^3r\nabla A(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}A(\mathbf{r}) \tag{B.57}$$

in ein Integral über die Oberfläche ∂V umformen. Dabei weist $d\mathbf{f}$ nach außen. Insbesondere folgt

$$\int_V d^3r \,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.58}$$

$$\int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.59}$$

$$\int_V d^3r \,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.60}$$

B.d.δ Volumen-Integrale über Produkte

Setzt man für $\Phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in den Gleichungen (B.58-B.60) Produkte ein und verwendet die Gleichungen (B.27-B.30), so erhält man

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \tag{B.61}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.62}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\times\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.63}$$

$$\int_V d^3r\mathbf{b}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\mathbf{b}(\mathbf{r})). \tag{B.64}$$

Diese Gleichungen erlauben die Umformung eines Volumen-Integrals in ein anderes Volumen-Integral und ein Oberflächen-Integral. Dies ist die Übertragung der partiellen Integration von einer auf drei Dimensionen. In vielen Fällen verschwindet das Oberflächenintegral im Limes eines unendlichen Volumens, so dass die Gleichungen (B.61-B.64) die Umformung eines Volumenintegrals in ein anderes erlauben.
Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) durch $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) durch $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, so folgt wegen (B.22) und (B.23)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})). \tag{B.65}$$

Ähnlich erhält man aus (B.63)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}))\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}). \tag{B.66}$$

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) durch $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, so folgt der Greensche Satz

$$\int_V d^3r(\Phi(\mathbf{r})\triangle\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\triangle\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})). \tag{B.67}$$

B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes

B.e.α Der Laplace-Operator von $1/r$

Für $r \neq 0$ findet man $\triangle(1/r) = 0$. Wertet man das Integral über eine Kugel vom Radius R unter Verwendung von (B.59) aus,

$$\int \triangle(\frac{1}{r})d^3r = \int d\mathbf{f}\cdot\,\mathrm{grad}\,(\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r}rd\Omega\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$, so erhält man -4π. Man schreibt daher

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

wobei Diracs Delta-"Funktion" $\delta^3(\mathbf{r})$ (eigentlich eine Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst .} \end{array} \right. \tag{B.70}$$

hat. Aus

$$\triangle \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

folgt mit (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Man bestimme die δ-Funktions-Anteile in (B.45) bis (B.49). Welche Dimension hat $\delta^3(\mathbf{r})$?

B.e.β Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes

Wir schreiben das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r'\mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

und erhalten aus (B.71), da $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ nicht von $\mathbf{r}$ abhängt,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \operatorname{grad}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \operatorname{rot}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

was sich als

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) + \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

mit

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.76}$$

schreiben lässt. Falls die Integrale (B.75) und (B.76) existieren, erhält man auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als Summe des rotationsfreien Feld $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ und des divergenzfreien Feldes $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mit (B.48) folgt

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{B.77}$$

C Kugelflächenfunktionen

C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen

Gesucht sind die Eigenfunktionen Y

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

mit

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

wobei die Operatoren (Multiplikationen mit Funktionen und Differentiationen) von rechts nach links angewendet werden (vergleiche 5.16). Man führt dann den Separations-Ansatz ein

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

Mit

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

folgt durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Division durch $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

Die Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ konstant ist. Da außerdem $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$ sein soll, folgt

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ mit ganzem } m. \tag{C.6}$$

Damit reduziert sich die Differentialgleichung für g auf

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

C.b Zugeordnete Legendre-Funktionen

Beachtet man, dass (wenigstens für positives m) der Faktor $e^{im\phi}$ von der analytischen Funktion $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$ herrührt, so liegt es nahe, einen Faktor $(sin\theta)^m$ aus g herauszuziehen,

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

woraus dann für G die Gleichung

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

folgt.
Für die Funktion G können wir eine Taylor-Entwicklung ansetzen

$$G(\xi) = \sum_k a_k\xi^k, \quad G'(\xi) = \sum_k k a_k \xi^{k-1}, \quad G''(\xi) = \sum_k k(k-1)a_k\xi^{k-2} \tag{C.10}$$

und finden durch Koeffizienten-Vergleich

$$[m(m+1) + 2(m+1)k + k(k-1) + \lambda]a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2}. \tag{C.11}$$

Setzen wir

$$\lambda = -l(l+1), \tag{C.12}$$

so lautet die Rekursionsformel

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{(m+k+l+1)(m+k-l)}{(k+1)(k+2)}. \tag{C.13}$$

Die Reihenentwicklung bricht bei einem endlichen k ab, wenn der Zähler verschwindet, also insbesondere für ganzes nicht negatives $k = l - m$. Diesen Fall wollen wir weiter untersuchen. Ohne nähere Betrachtung sei erwähnt, dass in den anderen Fällen die Funktion Y ein nichtanalytisches Verhalten für $\cos\theta = \pm 1$ entwickelt.
Der führende Term hat dann den Koeffizienten a_{l-m}. Durch Anwendung der Rekursionsformel findet man

$$\begin{aligned}
a_{l-m-2} &= -\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)2} a_{l-m} \\
&= -\frac{(l-m)(l-m-1)l}{(2l-1)2l} a_{l-m}, && \text{(C.14)} \\
a_{l-m-4} &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{(2l-1)(2l-3)2\cdot 4} a_{l-m} \\
&= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)2l(2l-2)2} a_{l-m}, && \text{(C.15)} \\
a_{l-m-2k} &= (-)^k \frac{(l-m)!l!(2l-2k)!}{(l-m-2k)!(l-k)!(2l)!k!} a_{l-m}. && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

Üblicherweise wählt man

$$a_{l-m} = \frac{(-)^m (2l)!}{(l-m)!2^l l!}. \tag{C.17}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
G(\xi) &= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \frac{(2l-2k)!}{(l-m-2k)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-)^k \xi^{l-m-2k} && \text{(C.18)} \\
&= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \binom{l}{k} (-)^k \frac{d^{l+m} \xi^{2l-2k}}{d\xi^{l+m}} = \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}. && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

Man bezeichnet dann die Lösungen $g(\xi)$ in der Form

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2-1)^l \tag{C.20}$$

als zugeordnete Legendre-Funktionen. Bis auf Normierung ist $Y_{lm}(\theta,\phi)$ durch $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ gegeben. Die Differentialgleichung für g hängt nur von m^2 ab, aber nicht vom Vorzeichen von m. Wir vergleichen daher P_l^m und P_l^{-m}. Es sei $m \geq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l-m}{k} \frac{d^k(\xi-1)^l}{d\xi^k} \frac{d^{l-m-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l-m)!l!l!}{k!(l-m-k)!(l-k)!(m+k)!} (\xi-1)^{l-k}(\xi+1)^{m+k}, && \text{(C.21)} \\
\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{k+m} \frac{d^{m+k}(\xi-1)^l}{d\xi^{m+k}} \frac{d^{l-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l+m)!l!l!}{(m+k)!(l-k)!(l-m-k)!k!} (\xi-1)^{l-k-m}(\xi+1)^k. && \text{(C.22)}
\end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

$$P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-)^m P_l^m(\xi), \tag{C.23}$$

das heißt, bis auf die Normierung stimmen die beiden Lösungen überein.

C.c Orthogonalität und Normierung

Wir betrachten das Normierungs-Integral

$$N_{lml'm'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l^m(\cos\theta)e^{-im\phi}P_{l'}^{m'}(\cos\theta)e^{im'\phi}. \tag{C.24}$$

Die Integration über ϕ ergibt

$$\begin{aligned} N_{lml'm'} &= 2\pi\delta_{mm'}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^m(\xi)d\xi \\ &= 2\pi\delta_{mm'}(-)^m\frac{(l'+m)!}{(l'-m)!}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^{-m}(\xi)d\xi \\ &= \frac{2\pi(l'+m)!}{(l'-m)!}\frac{\delta_{mm'}}{2^{2l}l!^2}I_m^{ll'} \end{aligned} \tag{C.25}$$

mit

$$I_m^{ll'} = (-)^m\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m}}d\xi. \tag{C.26}$$

Durch partielle Integration findet man

$$I_m^{ll'} = (-)^m\left[\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m-1}}\right]_{-1}^{+1} + I_{m+1}^{ll'}. \tag{C.27}$$

Der erste Faktor in eckigen Klammern enthält mindestens $-m$, der zweite $m+1$ Nullstellen bei $\xi = \pm 1$. Die eckige Klammer verschwindet demnach. Das heißt $I_m^{ll'}$ ist unabhängig von m für $-l \le m \le l'$. Für $l' > l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, da der erste Faktor des Integranden von $I_{l'}^{ll'}$ verschwindet. Für $l' < l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, da der zweite Faktor des Integranden von $I_{-l}^{ll'}$ verschwindet. Für $l = l'$ werten wir aus

$$I_m^{ll} = I_l^{ll} = (-)^l\int_{-1}^{+1}\frac{d^{2l}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{2l}}(\xi^2-1)^l d\xi. \tag{C.28}$$

Der erste Faktor im Integranden ist die Konstante $(2l)!$

$$I_m^{ll} = (2l)!\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^l d\xi. \tag{C.29}$$

Das letztere Integral ergibt $2^{2l+1}l!^2/(2l+1)!$ (man findet das, in dem man den Integranden $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ schreibt und l mal partiell integriert, in dem man jeweils die Potenz von $1-\xi$ differenziert und die von $1+\xi$ integriert. Das ergibt das Normierungsintegral

$$N_{lml'm'} = 2\pi\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\delta_{m,m'}. \tag{C.30}$$

Damit ergeben sich die orthonormierten Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{C.31}$$

C.d Bemerkung zur Vollständigkeit

Entwickeln wir eine in den drei kartesischen Koordinaten x, y, z in der Umgebung des Ursprungs analytische Funktion f in eine Taylor-Reihe

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k = \sum_n r^n f_n(\theta, \phi), \tag{C.32}$$

so sind die Beiträge proportional zu r^n in denen mit $i + j + k = n$ enthalten. Dies sind insgesamt $(n+1) + n + (n-1) + ... = (n+2)(n+1)/2$ Terme

$$f_n(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j-k,j,k} (\frac{x}{r})^{n-j-k} (\frac{y}{r})^j (\frac{z}{r})^k. \tag{C.33}$$

Andererseits können wir die Funktion f_n auch durch die Funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{...} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$, darstellen, da sich diese als $(\sin\theta)^{|m|} e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multipliziert mit einem Polynom in $\cos\theta$ der Ordnung $l - |m|$ schreiben lassen. Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden. Zusätzlich führen wir noch einen Faktor $((x^2 + y^2 + z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$ ein. Dann erhalten wir Beiträge für $l = n, n-2, n-4, ...$ Da m jeweils von $-l$ bis l läuft, ergibt das insgesamt $(2n+1) + (2n-3) + (2n-7) + ... = (n+2)(n+1)/2$ linear unabhängige (weil orthogonale) Beiträge. Der Raum dieser Funktionen hat daher die gleiche Dimension wie der der f_n. Wir können daher jede Funktion f_n durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen ausdrücken.

Inhalt Elektrodynamik

Korrekturen seit Entfernung des Vermerks 'vorläufig'
Vor Gl. (3.15) $\mathbf{E}$ statt E.
Zwischen Gleichung (7.43) und (7.44) $q'' = q'R/r'$
In Abschnitten 20, 21, 24 Lorenz-Eichung statt Lorentz-Eichung (siehe Hinweis in Abschnitt 20)
In (22.a.α) Φ_0 und $\mathbf{A}_0$ statt Φ und $\mathbf{A}$.
Nach Gleichung (C.33): 'Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2+y^2+z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden.'
Korrekturen offensichtlicher Druckfehler wie in der Überschrift '27 Lagrang**r**e-Formulierung' werden hier normalerweise nicht angegeben, aber im Skriptum ausgeführt.