F Elektromagnetische Wellen

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

16 Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in homogenen isotropen Isolatoren

16.a Wellengleichung

Wir betrachten elektromagnetische Wellen in einem homogenen isotropen Isolator einschließlich dem Vakuum. Das heißt, wir verlangen, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ orts- und zeitunabhängig sind. Wir verlangen weiterhin, dass keine freien Ströme und Ladungen auftreten $\rho_{\rm f}=0$, $\mathbf{j}_{\rm f}=\mathbf{0}$. Das Material ist also ein Isolator. Damit lauten dann die vier Maxwell-Gleichungen, ausgedrückt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ mit Hilfe von $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{16.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\epsilon}{\rm c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{\rm c}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.2}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\epsilon}{\rm c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-\frac{\epsilon\mu}{\rm c^2}\ddot{\mathbf{H}} \tag{16.3}$$

Mit

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\mathbf{H}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H})=-\triangle\mathbf{H}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) \tag{16.4}$$

folgt unter Berücksichtigung von (16.1) für $\mathbf{H}$ und analog für $\mathbf{E}$

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{16.5}$$

$$\triangle\mathbf{E} = \frac{1}{c'^2}\ddot{\mathbf{E}}, \tag{16.6}$$

$$c' = \frac{\rm c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{16.7}$$

Die Gleichungen (16.5) und (16.6) heißen Wellengleichungen.

16.b Ebene Wellen

Wir suchen nun partikuläre Lösungen der Wellengleichungen und beginnen mit Lösungen, die nur von z und t abhängen, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(z,t)$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}(z,t)$. Für die z-Komponenten folgt dann

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0 \quad\to\quad \frac{\partial E_{\rm z}}{\partial z}=0 \tag{16.8}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{\rm z}=0=\frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm z} \quad\to\quad \frac{\partial E_{\rm z}}{\partial t}=0. \tag{16.9}$$

In der z-Richtung ist mit diesem Ansatz also nur ein statisches homogenes Feld, das heißt ein konstantes Feld $E_{\rm z}$ möglich. Entsprechendes gilt auch für $H_{\rm z}$. Wir sehen hieraus bereits, dass elektromagnetische Wellen Transversal-Wellen sind.
Für die x- und die y-Komponenten folgt

$$(\nabla\times\mathbf{H})_{\rm x}=\frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm x}\;\to\;-\nabla_{\rm z}H_{\rm y}=\frac{\epsilon}{\rm c}\dot{E}_{\rm x}\;\to\;-\nabla_{\rm z}(\sqrt{\mu}H_{\rm y})=\frac{1}{c'}(\sqrt{\epsilon}E_{\rm x})\dot{} \tag{16.10}$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_{\rm y}=-\frac{\mu}{\rm c}\dot{H}_{\rm y}\;\to\;\nabla_{\rm z}E_{\rm x}=-\frac{\mu}{\rm c}\dot{H}_{\rm y}\;\to\;\nabla_{\rm z}(\sqrt{\epsilon}E_{\rm x})=-\frac{1}{c'}(\sqrt{\mu}H_{\rm y})\dot{}. \tag{16.11}$$

E_x ist mit H_y verknüpft, analog E_y mit $-H_\mathrm{x}$. Wir können die beiden Gleichungen (16.10) und (16.11) zusammenfassen zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}) = \mp c'\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y}). \tag{16.12}$$

Die Lösung dieser Gleichung und der entsprechenden für E_y mit $-H_\mathrm{x}$ ist

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} \pm \sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = 2f_\pm(z \mp c't), \tag{16.13}$$
$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} \mp \sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = 2g_\pm(z \mp c't), \tag{16.14}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $f_\pm$ und $g_\pm$, woraus dann

$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{x} = f_+(z-c't) + f_-(z+c't) \tag{16.15}$$
$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{y} = f_+(z-c't) - f_-(z+c't) \tag{16.16}$$
$$\sqrt{\epsilon}E_\mathrm{y} = g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.17}$$
$$\sqrt{\mu}H_\mathrm{x} = -g_+(z-c't) + g_-(z+c't) \tag{16.18}$$

folgt. Es handelt sich also um die Überlagerung von Wellen beliebiger Form, die nach oben (f_+, g_+) und nach unten (f_-, g_-) mit der Geschwindigkeit c' laufen. $c' = \mathrm{c}/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (des Lichtes) in dem jeweiligen Medium. Insbesondere finden wir, dass c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist.
Wir berechnen noch die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 + f_-^2 + g_-^2) \tag{16.19}$$

und die Energiestromdichte in Form des Poynting-Vektors

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{\mathrm{c}'\mathbf{e}_\mathrm{z}}{4\pi}(f_+^2 + g_+^2 - f_-^2 - g_-^2), \tag{16.20}$$

wobei wir ein homogenes Feld in z-Richtung nicht berücksichtigt haben. Durch Vergleich der Ausdrücke für u und $\mathbf{S}$ jeweils nur für die nach oben oder unten laufenden Anteile sieht man, dass die Energie mit der Geschwindigkeit der Welle $\pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z}$ transportiert wird, da $\mathbf{S} = \pm c'\mathbf{e}_\mathrm{z}u$. Wir bemerken noch, dass die Welle, für die $E_\mathrm{y} = 0$ und $H_\mathrm{x} = 0$, das heißt $g_\pm = 0$, linear polarisiert in x-Richtung heißt. Für die Angabe der Polarisationsrichtung ist immer die Richtung des Vektors $\mathbf{E}$ maßgeblich.

16.c Überlagerung ebener periodischer Wellen

Allgemein kann man die elektrische Feldstärke als Fourier-Integral ansetzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k d\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{16.21}$$

analog für $\mathbf{H}$. Damit drücken wir die Felder als Überlagerung ebener periodischer Wellen aus.

16.c.α Einschub über Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode L, $f(x+L) = f(x)$, lautet

$$f(x) = \hat{c}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{2\pi i n x/L}. \tag{16.22}$$

f_n sind die Fourier-Koeffizienten von f. Die Darstellung ist möglich für quadrat-integrable Funktionen, mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeits-Stellen. $\hat{c}$ ist eine geeignete Konstante. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gewinnt man aus

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x/L} f(x) = \hat{c}Lf_n, \tag{16.23}$$

wie man durch Einsetzen in (16.22) und Vertauschen von Summation und Integration leicht sehen kann. Die Fourier-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ durchführt und

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = f_0(k), \quad \hat{c} = \Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{16.24}$$

definiert. Dann geht nämlich (16.22) in

$$f(x) = \sum \Delta k f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \to \int_{-\infty}^{\infty} dk f_0(k) \mathrm{e}^{ikx} \tag{16.25}$$

über und die Rück-Transformation (16.23) in

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi f_0(k). \tag{16.26}$$

Damit können wir zum Beispiel die Rücktransformation von (16.21) zu

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 r dt \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{16.27}$$

angeben.

16.c.β Zurück zu den Maxwell-Gleichungen

Die Darstellung durch die Fourier-Transformierte hat den Vorteil, dass die Gleichungen einfacher werden. Durch Anwendung der Operationen ∇ und $\partial/\partial t$ auf die Exponentialfunktion

$$\nabla \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = i\mathbf{k} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = -i\omega \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{16.28}$$

in den Maxwell-Gleichungen folgt für die Fourier-Komponenten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \to \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{16.30}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{\epsilon}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \tag{16.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{H}} \quad \to \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.32}$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß immer nur Fourier-Komponenten mit gleichem $\mathbf{k}$ und ω miteinander verknüpft sind. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ folgt $\omega = 0$, wobei $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ beliebig sein können. Dies sind die statischen homogenen Felder. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ folgt aus (16.29) und (16.30), dass

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}. \tag{16.33}$$

Aus den beiden anderen Gleichungen (16.31) und (16.32) folgt

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\mu}{\mathrm{c}} \omega \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\epsilon\mu}{\mathrm{c}^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega). \tag{16.34}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c'^2} \omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega), \tag{16.35}$$

analog für $\mathbf{H}_0$. Wegen (16.29) verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (16.35). Es gibt also nicht verschwindende Lösungen, wenn die Beziehung $\omega = \pm c'k$ erfüllt ist. Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen, das heißt der Zusammenhang zwischen Frequenz

und Wellenvektor für elektromagnetische Wellen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung können wir schreiben

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - c'k)\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + c'k)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}). \tag{16.36}$$

und damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right). \tag{16.37}$$

Da die elektrische Feldstärke reell sein muss, muss sie mit ihrem Konjugiert-komplexen übereinstimmen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right).\end{aligned} \tag{16.38}$$

Durch Koeffizienten-Vergleich folgt

$$\mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}). \tag{16.39}$$

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+c'kt)}\right)\\ &= \int d^3k \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\right)\\ &= \Re\Big(\int d^3k\mathbf{E}_1(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big).\end{aligned} \tag{16.40}$$

Für $\mathbf{H}_0$ folgt dann aus (16.32)

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{k},\omega) = \frac{\mathrm{c}}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\delta(\omega - c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) - \delta(\omega + c'k)\frac{\mathbf{k}}{2k}\times\mathbf{E}_2(\mathbf{k})\right) \tag{16.41}$$

und damit für $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\Big(\int d^3k\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-c'kt)}\Big). \tag{16.42}$$

Trägt nur eine Fourier-Komponente bei, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{1,0}$ (Idealisierung), so spricht man von einer monochromatischen Welle,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}) \tag{16.43}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\Re\Big(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0}\times\mathbf{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-c'k_0t)}\Big). \tag{16.44}$$

Von linear polarisierten Wellen (Licht) spricht man, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = \mathbf{e}_1E_{1,0}$ mit einem reellen Einheitsvektor $\mathbf{e}_1$, von zirkular polarisierten, wenn $\mathbf{E}_{1,0} = (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)E_{1,0}/\sqrt{2}$ mit reellen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k}_0$ eine orthogonale Rechtsbasis bilden. Für das obere Vorzeichen ist die Welle rechts-, für das untere links-polarisiert.

16.c.γ Zeitmittelwerte und Zeitintegrale

Die Energiedichte und der Poynting-Vektor sind Größen, die bilinear in den Feldern sind. Hat man etwa monochromatische Wellen, wie in (16.43) und (16.44), so oszillieren diese Größen. Man ist aber oft am Mittelwert dieser Größen interessiert. Haben wir also zwei Größen

$$a = \Re\big(a_0\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \quad b = \Re\big(b_0\mathrm{e}^{-i\omega t}\big), \tag{16.45}$$

so ist

$$ab = \frac{1}{4}a_0b_0\mathrm{e}^{-2i\omega t} + \frac{1}{4}(a_0b_0^* + a_0^*b_0) + \frac{1}{4}a_0^*b_0^*e^{2i\omega t}. \tag{16.46}$$

Der erste und der letzte Term oszillieren (wir nehmen $\omega \neq 0$ an). Sie heben sich im Zeitmittel weg, so dass im Zeitmittel bleibt

$$\overline{ab} = \frac{1}{4}(a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2}\Re(a_0^* b_0). \tag{16.47}$$

Man beachte, dass a_0 und b_0 im allgemeinen komplex sind, und das Zeitmittel wesentlich von der relativen Phase beider Größen und nicht nur von den Beträgen $|a_0|$ und $|b_0|$ abhängt.
Sind a und b durch Fourier-Integrale gegeben,

$$a(t) = \Re\Big(\int d\omega a_0(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t}\Big) \tag{16.48}$$

und analog für $b(t)$, so werden häufig die Zeitintegrale über diese Größen und deren Produkte endlich sein. Hierzu müssen wir das Zeitintegral $\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{e}^{-i\omega t}$ bestimmen. Dieses Integral ist nicht wohl definiert. Tatsächlich soll es aber mit einer in ω stetigen Funktion multipliziert werden, so dass es auch genügt, herauszubekommen, wie sich das Zeit-Integral über dieses Frequenz-Integral verhält. Hierzu gehen wir auf die Notation unseres Einschubs mit x und k zurück und stellen fest, dass

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L\delta_{0,n}, \tag{16.49}$$

also

$$\sum_{n=n_-}^{n_+} \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-2\pi i n x/L} = L, \tag{16.50}$$

falls $n_- \leq 0$ und $n_+ \geq 0$ sind, sonst verschwindet die Summe. Jetzt führen wir wieder den Limes $L \to \infty$ durch und erhalten

$$\sum_{k_-}^{k_+} \Delta k \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathrm{e}^{-ikx} = \Delta k L \to \int_{k_-}^{k_+} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi, \tag{16.51}$$

falls k_- negativ und k_+ positiv sind, sonst ist es Null. Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ikx} = 2\pi\delta(k). \tag{16.52}$$

Mit diesem Ergebnis finden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega) + a_0^*(-\omega)\big)\big(b_0(-\omega) + b_0^*(\omega)\big). \tag{16.53}$$

Treten nur positive Frequenzen ω unter dem Integral auf, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) b(t) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} d\omega \big(a_0(\omega) b_0^*(\omega) + a_0^*(\omega) b_0(\omega)\big) = \pi\Re\Big(\int_0^{\infty} d\omega a_0^*(\omega) b_0(\omega)\Big). \tag{16.54}$$

17 Elektromagnetische Wellen in homogenen Leitern

17.a Transversal-Schwingungen bei niedrigen Frequenzen

Wir untersuchen Transversal-Schwingungen in einem homogenen Leiter. Dabei setzen wir $\mu = 1$. Aus

$$\mathbf{j}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E} \tag{17.1}$$

folgt

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}}\epsilon\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\sigma\mathbf{E}. \tag{17.2}$$

Bei periodischen Feldern der Kreisfrequenz ω,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{17.3}$$

entsprechend auch für ρ_f und $\mathbf{j}_\mathrm{f}$, folgt dann

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 + (\frac{i\omega}{\mathrm{c}}\epsilon - \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\sigma)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \tag{17.4}$$

Dies können wir auch schreiben

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 + \frac{i\omega}{\mathrm{c}}\epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \tag{17.5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_\mathrm{f} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_\mathrm{f} = 0 \tag{17.6}$$

folgt

$$-i\omega\rho_{\mathrm{f},0} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = 0 \tag{17.7}$$

und damit

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D}_0 = 4\pi\rho_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi}{i\omega}\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \frac{4\pi\sigma}{i\omega}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}_0. \tag{17.8}$$

Damit gilt

$$\epsilon(\omega)\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}_0 = 0 \tag{17.9}$$

wegen $\mathrm{div}\,\mathbf{D}_0 = \epsilon\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}_0$. Wir können daher unsere bisherigen Ergebnisse von Isolatoren auf Leiter übertragen, indem wir ϵ durch $\epsilon(\omega)$ ersetzen. So finden wir

$$k^2 = \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}. \tag{17.10}$$

Da $\epsilon(\omega)$ komplex ist, ist für reelles ω der Wellenvektor $\mathbf{k}$ komplex. Wir setzen

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa, \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}(n + i\kappa) \tag{17.11}$$

und erhalten mit

$$\mathrm{e}^{ikz} = \mathrm{e}^{i\omega nz/\mathrm{c} - \omega\kappa z/\mathrm{c}} \tag{17.12}$$

eine gedämpfte Welle. Für die Felder ergibt sich dann

$$\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}_0\mathrm{e}^{i\omega(nz/\mathrm{c}-t)})\mathrm{e}^{-\omega\kappa z/\mathrm{c}}, \tag{17.13}$$

$$\mathbf{B} = \Re(\sqrt{\epsilon(\omega)}\mathbf{e}_\mathrm{z} \times \mathbf{E}_0\mathrm{e}^{i\omega(nz/\mathrm{c}-t)})\mathrm{e}^{-\omega\kappa z/\mathrm{c}}. \tag{17.14}$$

Die Amplitude fällt auf der Strecke $d = \frac{\mathrm{c}}{\omega\kappa}$ auf 1/e ab (Eindringtiefe). Für kleine Frequenzen kann man approximieren

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad d = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \tag{17.15}$$

Für Kupfer hat man $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$, für $\omega = 2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}$ folgt $d = 9$ mm. Man spricht vom Skin-Effekt. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen rapider ist.

17.b Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Tatsächlich hängen ϵ und σ von ω ab. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers (zum Beispiel eines Elektrons im Metall) aus,

$$m_0\ddot{\mathbf{r}} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau}\dot{\mathbf{r}}, \tag{17.16}$$

wobei m_0 und e_0 Masse und Ladung des Ladungsträgers seien. Der letzte Term ist ein Reibungsterm, der die Stöße mit anderen Teilchen pauschal beschreibt. Dabei ist τ die Relaxationszeit, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit $\mathbf{j}_\mathrm{f} = \rho_\mathrm{f}\dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0 \dot{\mathbf{r}}$, wobei n_0 die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_0 e_0}\frac{\partial \mathbf{j}_\mathrm{f}}{\partial t} = e_0\mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0\tau e_0}\mathbf{j}_\mathrm{f}. \tag{17.17}$$

Im stationären Fall $\partial\mathbf{j}_\mathrm{f}/\partial t = \mathbf{0}$ folgt die statische Leitfähigkeit $\sigma_0 = \frac{n_0\tau e_0^2}{m_0}$, so dass wir

$$\tau\frac{\partial \mathbf{j}_\mathrm{f}}{\partial t} = \sigma_0\mathbf{E} - \mathbf{j}_\mathrm{f} \tag{17.18}$$

schreiben können. Mit der Zeitabhängigkeit $\propto \mathrm{e}^{-i\omega\tau}$ folgt dann

$$(1 - i\omega\tau)\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \sigma_0\mathbf{E}_0, \tag{17.19}$$

was aufgelöst wird zu

$$\mathbf{j}_{\mathrm{f},0} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0 \tag{17.20}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \tag{17.21}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}. \tag{17.22}$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$ folgt daraus

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{m_0\omega^2} = \epsilon\big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\big) \tag{17.23}$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \tag{17.24}$$

Für $\omega < \omega_\mathrm{P}$ erhält man ein negatives $\epsilon(\omega)$, das heißt

$$n = 0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon\big(\frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2} - 1\big)} \tag{17.25}$$

mit einem exponentiellen Abfall der Welle. Für $\omega > \omega_\mathrm{P}$ dagegen wird ϵ positiv,

$$n = \sqrt{\epsilon\big(1 - \frac{\omega_\mathrm{P}^2}{\omega^2}\big)}, \quad \kappa = 0. \tag{17.26}$$

Für diese hohen Frequenzen ist der Leiter durchsichtig. Für Kupfer hat man $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13}$ s^{-1}, $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17}$ s^{-1} und $\omega_\mathrm{P} = 1.6 \cdot 10^{16}$ s^{-1}. Für sichtbares Licht hat man den Frequenz-Bereich $\omega = 2.4...5.2 \cdot 10^{15}$ s^{-1}, so dass Kupfer im sichtbaren Bereich undurchsichtig ist. In Elektrolyten ist jedoch die Ladungsträgerdichte niedriger, die Masse der Ladungsträger höher, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

17.c Longitudinale = Plasma-Schwingungen

Für $\omega = \omega_\mathrm{P}$ ist $\epsilon(\omega) = 0$. Dann erlaubt (17.9) longitudinale elektrische Wellen

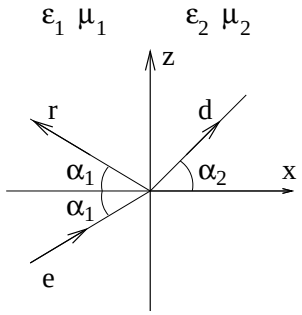
$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z\mathrm{e}^{i(k_z z - \omega_\mathrm{P} t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{17.27}$$

Diese gehen mit longitudinalen Schwingungen der Ladungsträger einher, die man erhält, wenn man den Reibungsterm in (17.17) vernachlässigt.

18 Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche

18.a Problemstellung und Ausbreitungsrichtung

Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle $\propto \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ für $x < 0$, $\mathbf{k}_\mathrm{e} = (k', 0, k_\mathrm{z})$, die auf die Grenzfläche $x = 0$ auftrifft. Für $x < 0$ habe man die Dielektrizitätskonstante ϵ_1 und die Permeabilität μ_1, für $x > 0$ habe man ϵ_2 und μ_2. An der Grenzfläche $x = 0$ variiert die Welle wie $\propto \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} z-\omega t)}$. Für die reflektierte und die gebrochene Welle hat man das gleiche Verhalten an der Grenzfläche, das heißt sie stimmen alle in k_z, k_y und ω überein und unterscheiden sich nur in k_x. Aus



$$\mathbf{k}_i^2 = \frac{\epsilon_i \mu_i \omega^2}{\mathrm{c}^2} = \frac{n_i^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i} \tag{18.1}$$

folgt

$$k_1^2 = k_\mathrm{z}^2 + k'^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{r} = (-k', 0, k_\mathrm{z}) \tag{18.2}$$

$$k_2^2 = k_\mathrm{z}^2 + k''^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2} \qquad \mathbf{k}_\mathrm{d} = (k'', 0, k_\mathrm{z}). \tag{18.3}$$

Dabei sind $n_{1,2}$ die Brechzahlen der beiden Medien. Die x-Komponente des Wellenvektors der reflektierten Welle $\mathbf{k}_\mathrm{r}$ ist gerade das Negative der einlaufenden Welle. Daher stimmt der Einfallswinkel α_1 mit dem Reflexionswinkel überein. Falls k'' reell ist, muss man $k'' > 0$ wählen, damit die Welle ausläuft und nicht einläuft. Falls k'' imaginär ist, muss man $\Im k'' > 0$ wählen, damit die Welle im Material 2 exponentiell abklingt und nicht anwächst. Für reelles k'' hat man

$$k_\mathrm{z} = k_1 \sin\alpha_1 = k_2 \sin\alpha_2. \tag{18.4}$$

Daraus folgt mit (18.1) das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \tag{18.5}$$

Falls sich $\sin\alpha_2 > 1$ ergibt, entspricht das einem imaginären k''. Wir bemerken schließlich noch

$$\frac{k'}{k''} = \frac{k_1 \cos\alpha_1}{k_2 \cos\alpha_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}. \tag{18.6}$$

18.b Grenzbedingungen, Amplituden

Wir müssen nun zwei Polarisationen unterscheiden. Diese werden auf die Einfallsebene bezogen. Diese ist die von der Richtung des einfallenden Strahls und von der Normalen auf die Grenzfläche aufgespannte Ebene (in unseren Koordinaten die x-z-Ebene). Die Polarisation 1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, das heißt $\mathbf{E}$ ist in y-Richtung polarisiert. Die Polarisation 2 liegt in der Einfallsebene, $\mathbf{H}$ liegt in y-Richtung. Man erhält dann folgende Polarisationen und Stetigkeitsbedingungen

	Polarisation 1	Polarisation 2	
$\mathbf{E}$	$\perp$ Einfallsebene	in Einfallsebene	
$\mathbf{H}$	in Einfallsebene	$\perp$ Einfallsebene	
$\mathbf{E}_\mathrm{t}$	$E_{1,\mathrm{y}} = E_{2,\mathrm{y}}$	$E_{1,\mathrm{z}} = E_{2,\mathrm{z}}$	(18.7)
$D_\mathrm{n} = \epsilon E_\mathrm{n}$		$\epsilon_1 E_{1,\mathrm{x}} = \epsilon_2 E_{2,\mathrm{x}}$	(18.8)
$\mathbf{H}_\mathrm{t}$	$H_{1,\mathrm{z}} = H_{2,\mathrm{z}}$	$H_{1,\mathrm{y}} = H_{2,\mathrm{y}}$	(18.9)
$B_\mathrm{n} = \mu H_\mathrm{n}$	$\mu_1 H_{1,\mathrm{x}} = \mu_2 H_{2,\mathrm{x}}$		(18.10)

Für die Polarisation 1 hat man daher für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}\mathbf{e}_\mathrm{y}\cdot\begin{cases}(E_\mathrm{e}\mathrm{e}^{ik'x}+E_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-ik'x}) & x<0\\ E_\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{ik''x} & x>0\end{cases} \tag{18.11}$$

anzusetzen. Aus den Maxwell-Gleichungen erhält man daraus die magnetische Feldstärke

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{H}} = \frac{i\omega\mu}{\mathrm{c}}\mathbf{H}, \tag{18.12}$$

$$\mu H_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{c}}{i\omega}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{c}}{i\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial z} = -\frac{\mathrm{c}k_\mathrm{z}}{\omega}E_\mathrm{y} \tag{18.13}$$

$$H_\mathrm{z} = \frac{\mathrm{c}}{i\mu\omega}\frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial x} = \mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}\frac{\mathrm{c}}{\omega}\cdot\begin{cases}\frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}e^{ik'x}-E_\mathrm{r}e^{-ik'x}) & x<0\\ \frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}e^{ik''x} & x>0.\end{cases} \tag{18.14}$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit von E_y, die mit der Stetigkeit von H_x identisch ist, und aus der Stetigkeit von H_z,

$$E_\mathrm{e}+E_\mathrm{r}=E_\mathrm{d},\quad \frac{k'}{\mu_1}(E_\mathrm{e}-E_\mathrm{r})=\frac{k''}{\mu_2}E_\mathrm{d}, \tag{18.15}$$

woraus die Amplituden

$$E_\mathrm{r}=\frac{\mu_2k'-\mu_1k''}{\mu_2k'+\mu_1k''}E_\mathrm{e},\quad E_\mathrm{d}=\frac{2\mu_2k'}{\mu_2k'+\mu_1k''}E_\mathrm{e} \tag{18.16}$$

folgen.
Von der Polarisation 1 gelangt man zur Polarisation 2 durch die Transformation

$$\mathbf{E}\to\mathbf{H},\quad \mathbf{H}\to-\mathbf{E},\quad \epsilon\leftrightarrow\mu. \tag{18.17}$$

Daher erhält man für die Amplituden

$$H_\mathrm{r}=\frac{\epsilon_2k'-\epsilon_1k''}{\epsilon_2k'+\epsilon_1k''}H_\mathrm{e},\quad H_\mathrm{d}=\frac{2\epsilon_2k'}{\epsilon_2k'+\epsilon_1k''}H_\mathrm{e}. \tag{18.18}$$

18.c Diskussion für $\mu_1=\mu_2$

Wir diskutieren nun die Ergebnisse für $\mu_1=\mu_2$, da für viele Materialien die Permeabilität praktisch gleich 1 ist.

18.c.α Isolator, $|\sin\alpha_2|<1$: Brechung

Wir bestimmen nun die Amplitude der reflektierten Welle aus der der einfallenden Welle. Der Reflexionskoeffizient R, das heißt der Anteil der Strahlungsleistung, die reflektiert wird, ergibt sich zu

$$R=\Big(\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{e}}\Big)^2=\Big(\frac{H_\mathrm{r}}{H_\mathrm{e}}\Big)^2, \tag{18.19}$$

da der zeitgemittelte Poynting-Vektor $\mathbf{S}=\mathrm{c}\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi)$ für Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, die orthogonal auf einander stehen, sich betragsmäßig zu

$$\overline{|\mathbf{S}|}=\frac{\mathrm{c}}{8\pi}|\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{H}|=\frac{c'}{8\pi}\epsilon E^2=\frac{c'}{8\pi}\mu H^2 \tag{18.20}$$

ergibt. Für die Polarisation 1 ergibt sich mit (18.6)

$$E_\mathrm{r}=\frac{k'-k''}{k'+k''}E_\mathrm{e}=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2+\tan\alpha_1}E_\mathrm{e}=\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2+\alpha_1)}E_\mathrm{e}. \tag{18.21}$$

Für die Polarisation 2 folgt

$$H_{\rm r} = \frac{n_2^2 k' - n_1^2 k''}{n_2^2 k' + n_1^2 k''} H_{\rm e} = \frac{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 - \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \tan\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 \tan\alpha_1} H_{\rm e} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_{\rm e}. \tag{18.22}$$

Man erkennt, dass bei der Polarisation 2 die Reflexion verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, woraus dann wegen $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$ und (18.5) $\tan\alpha_1 = n_2/n_1$ folgt. Dies ist der Brewstersche Winkel. Bei Einfall von Licht unter diesem Winkel wird nur Licht der Polarisation 1 reflektiert. Dies kann zur Erzeugung linear polarisierten Lichtes verwendet werden. Im Limes α gegen Null, das heißt bei senkrechtem Auffall des Lichtes ergibt sich für beide Polarisationen (die in diesem Limes nicht mehr zu unterscheiden sind)

$$R = \big(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\big)^2, \quad \alpha = 0 \tag{18.23}$$

18.c.β Isolator, $|\sin\alpha_2| > 1$: Totalreflexion

In diesem Fall ist k'' imaginär. Die Welle dringt nur noch exponentiell abklingend in das zweite Material ein. Jeweils den ersten Ausdrücken in (18.21) und (18.22) entnimmt man, da der Zähler des Bruchs das konjugiert Komplexe des Nenners ist, dass

$$|E_{\rm r}| = |E_{\rm e}|, \quad |H_{\rm r}| = |H_{\rm e}|. \quad R = 1, \tag{18.24}$$

Man hat also Totalreflexion.

18.c.γ Metallische Reflexion, $\alpha = 0$

Im Falle der metallischen Reflexion setzen wir $n_1 = 1$ (Vakuum oder Luft) und $n_2 = n + i\kappa$ (17.11). Dann folgt für den Reflexionskoeffizient für $\alpha = 0$ aus (18.23)

$$R = \left|\frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1}\right| = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \tag{18.25}$$

Für $\omega\epsilon \ll 2\pi\sigma$ folgt dann aus (17.5) und (17.15)

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\sigma}}, \tag{18.26}$$

ein Ergebnis, das nach Hagen und Rubens benannt ist.

18.c.δ Oberflächenwellen am Leiter

Wir wollen nun noch Wellen betrachten, die sich an der Grenzfläche von Leiter und Vakuum entlang bewegen. Wir setzen also $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ aus (17.5). Wir benötigen dann auf jeder Seite der Grenzfläche genau eine Welle. Das erreichen wir, wenn wir die Lösung aufsuchen, bei der keine Welle reflektiert wird. Das heißt, wir nehmen formal die Welle mit Polarisation 2, bei der $H_{\rm r}$ in (18.18) verschwindet, also

$$\epsilon(\omega) k' = k'' \tag{18.27}$$

gilt. Zusammen mit (18.2) und (18.3)

$$k_{\rm z}^2 + k'^2 = \frac{\omega^2}{{\rm c}^2}, \quad k_{\rm z}^2 + k''^2 = \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{{\rm c}^2} \tag{18.28}$$

findet man die Lösung

$$k_{\rm z} = \frac{\omega}{\rm c}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{1 + \epsilon(\omega)}}, \quad k' = \frac{k_{\rm z}}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad k'' = \sqrt{\epsilon(\omega)} k_{\rm z}. \tag{18.29}$$

Mit der Näherung (17.15) erhält man für nicht zu große Frequenzen

$$k_z = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i\omega}{8\pi\sigma}\right) \tag{18.30}$$

$$k' = \frac{(1-i)\omega^{3/2}}{2c\sqrt{2\pi\sigma}} \tag{18.31}$$

$$k'' = \frac{(1+i)\omega^{1/2}\sqrt{2\pi\sigma}}{c}. \tag{18.32}$$

Für kleine Frequenzen, $\omega < \sigma$, ist daher der exponentielle Abfall in Ausbreitungsrichtung (k_z) am langsamsten, in das Vakuum hinein etwas schneller (k') und im Metall am schnellsten (k'').

19 Hohlleiter

Es gibt verschiedene Arten von Wellenleitern. Diese können zum Beispiel aus zwei Leitern bestehen, die entweder nebeneinander herlaufen (zwei Drähte) oder koaxiale Leiter sind. Man kann aber auch elektromagnetische Wellen in einem dielektrischen Wellenleiter (Lichtleiter) oder in einem Hohlleiter führen.
In allen Fällen wollen wir davon ausgehen, dass Translationsinvarianz in z-Richtung besteht, so dass die Materialgrößen ϵ, μ und σ nur Funktionen von x und y sind. Dann kann man die elektromagnetischen Felder ansetzen zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}. \tag{19.1}$$

Es bleiben nun die Funktionen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ und $\omega(k_z)$ zu bestimmen.

19.a Hohlleiter

Wir wollen das Programm für einen Hohlleiter durchführen, das heißt für einen Metallzylinder (nicht notwendig mit kreisförmigem Querschnitt). Wir beginnen mit den Randbedingungen, wobei wir die metallische Oberfläche als idealen Leiter annehmen, $\sigma = \infty$. Dann gilt an der Oberfläche

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \tag{19.2}$$

da eine tangentiale Komponente eine unendlich große Stromdichte an der Oberfläche bewirken würde. Weiter folgt aus $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$

$$ikB_n = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_n = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_t)\cdot\mathbf{e}_n \quad k = \omega/c, \tag{19.3}$$

woraus

$$B_n = 0 \tag{19.4}$$

folgt.
Im Inneren des Hohlleiters gilt

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_y = -\frac{1}{c}\dot{B}_y \quad \rightarrow \quad ik_z E_{0,x} - \nabla_x E_{0,z} = ikB_{0,y} \tag{19.5}$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_x = \frac{1}{c}\dot{E}_x \quad \rightarrow \quad \nabla_y B_{0,z} - ik_z B_{0,y} = -ikE_{0,x}. \tag{19.6}$$

Unter Verwendung von

$$k_\perp^2 = k^2 - k_z^2 \tag{19.7}$$

lassen sich die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausdrücken

$$k_\perp^2 E_{0,x} = ik_z\nabla_x E_{0,z} + ik\nabla_y B_{0,z} \tag{19.8}$$

$$k_\perp^2 B_{0,y} = ik\nabla_x E_{0,z} + ik_z\nabla_y B_{0,z}. \tag{19.9}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $E_{0,y}$ und $B_{0,x}$. Zur Bestimmung der Longitudinalkomponenten verwenden wir die Wellengleichung

$$(\triangle - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2})(E_{0,z}e^{i(k_z z-\omega t)}) = 0, \tag{19.10}$$

woraus

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)E_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.11}$$

und analog

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + k_\perp^2)B_{0,z}(x,y) = 0 \tag{19.12}$$

folgt. Man kann zeigen, dass damit für $k_\perp \neq 0$ auch die übrigen Maxwell-Gleichungen erfüllt sind. Es gilt nämlich

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \,\mathrm{div}\,\mathbf{E}{=}ik_\mathrm{z} \\ k_\perp^2\,(\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}-\dot{\mathbf{E}}/\mathrm{c})_\mathrm{z}{=}ik \end{array}\right\}\cdot\,(\nabla_\mathrm{x}^2+\nabla_\mathrm{y}^2+k_\perp^2)E_{0,\mathrm{z}}e^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)} \tag{19.13}$$

$$\left.\begin{array}{r} k_\perp^2 \,\mathrm{div}\,\mathbf{B}{=}ik_\mathrm{z} \\ k_\perp^2\,(\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}/\mathrm{c})_\mathrm{z}{=}{-}ik \end{array}\right\}\cdot\,(\nabla_\mathrm{x}^2+\nabla_\mathrm{y}^2+k_\perp^2)B_{0,\mathrm{z}}e^{i(k_\mathrm{z}z-\omega t)}. \tag{19.14}$$

Es genügt daher, die Wellengleichungen zu erfüllen. Wir bemerken weiter, dass $E_{0,\mathrm{z}}$ und $B_{0,\mathrm{z}}$ von einander unabhängig sind. Man unterscheidet dementsprechend TE-Moden (transversal elektrisch) mit $E_{0,\mathrm{z}}=0$ und TM-Moden (transversal magnetisch) mit $B_{0,\mathrm{z}}=0$.
Wir kommen nun nochmals auf die Randbedingungen zurück. Die Komponenten senkrecht zu der Ausbreitungsrichtung z lassen sich

$$k_\perp^2\,(\mathbf{e}_\mathrm{x}E_{0,\mathrm{x}}+\mathbf{e}_\mathrm{y}E_{0,\mathrm{y}}) \;=\; ik_\mathrm{z}\,\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}}-ik\mathbf{e}_\mathrm{z}\times\,\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}} \tag{19.15}$$

$$k_\perp^2\,(\mathbf{e}_\mathrm{x}B_{0,\mathrm{x}}+\mathbf{e}_\mathrm{y}B_{0,\mathrm{y}}) \;=\; ik_\mathrm{z}\,\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}}+ik\mathbf{e}_\mathrm{z}\times\,\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}} \tag{19.16}$$

schreiben. Für die TE-Mode ist $E_{0,\mathrm{z}}=0$. Am Rand muss $\mathbf{E}_\mathrm{t}=\mathbf{0}$ sein. $E_{0,\mathrm{z}}$ ist bereits Null. Es muss noch die Komponente von $\mathbf{E}_0$ parallel zur Oberfläche verschwinden. Das ist genau der Fall, wenn die Normalkomponente von $\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}}$ verschwindet, $(\,\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n}=0$. Damit folgt gleichzeitig $B_\mathrm{n}=0$. Für die TM-Mode ist $B_{0,\mathrm{z}}=0$. Wegen $\mathbf{E}_\mathrm{t}=0$ muss $E_{0,\mathrm{z}}=0$ auf der Oberfläche gelten. Dann ist $\mathrm{grad}\,E_{0,\mathrm{z}}$ senkrecht auf der Oberfläche und $\mathbf{E}_\mathrm{t}=\mathbf{0}$ und $B_\mathrm{n}=0$ sind auf der Oberfläche erfüllt.
Damit ist das folgende Eigenwert-Problem zu lösen

$$\text{TM-Mode:}\quad (\nabla_\mathrm{x}^2+\nabla_\mathrm{y}^2+k_\perp^2)E_{0,\mathrm{z}}=0,\quad E_{0,\mathrm{z}}=0 \text{ auf der Oberfläche}\,, \tag{19.17}$$

$$\text{TE-Mode:}\quad (\nabla_\mathrm{x}^2+\nabla_\mathrm{y}^2+k_\perp^2)B_{0,\mathrm{z}}=0,\quad (\mathrm{grad}\,B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n}=0 \text{ auf der Oberfläche}\,. \tag{19.18}$$

Es folgt das Dispersionsgesetz

$$\omega=\mathrm{c}\sqrt{k_\mathrm{z}^2+k_\perp^2}. \tag{19.19}$$

TEM-Moden Wir haben den Fall $k_\perp=0$ bisher nicht diskutiert. Wir wollen dies nicht in allen Details tun. Man kann zeigen, dass für diese Moden beide Longitudinal-Komponenten verschwinden, $E_{0,\mathrm{z}}=B_{0,\mathrm{z}}=0$. Man spricht daher von TEM-Moden. Für diese folgt mit $k_\mathrm{z}=\pm k$ aus (19.5) und analog durch eine Drehung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ um 90^0 um die z-Achse $E_{0,\mathrm{x}}\to E_{0,\mathrm{y}}$, $B_{0,\mathrm{y}}\to -B_{0,\mathrm{x}}$

$$B_{0,\mathrm{y}}=\pm E_{0,\mathrm{x}},\quad B_{0,\mathrm{x}}=\mp E_{0,\mathrm{y}}. \tag{19.20}$$

Aus $(\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\mathrm{z}=0$ folgt dann, dass man $\mathbf{E}_0$ durch den Gradienten eines Potentials darstellen kann

$$\mathbf{E}_0=-\,\mathrm{grad}\,\Phi(x,y), \tag{19.21}$$

das wegen $\mathrm{div}\,\mathbf{E}_0=0$ die Potentialgleichung erfüllt

$$(\nabla_\mathrm{x}^2+\nabla_\mathrm{y}^2)\Phi(x,y)=0. \tag{19.22}$$

Es ist also die homogene Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen zu lösen. Wegen $\mathbf{E}_{0,\mathrm{t}}=\mathbf{0}$ muss auf der Leiteroberfläche das Potential konstant sein. Daher erhält man eine nicht-triviale Lösung nur in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, also nicht im Innern eines kreisförmigen oder rechteckigen Querschnitts, aber außerhalb, oder in Koaxialkabeln, oder im Außenraum zweier Drähte.

19.b Lösung für rechteckigen Querschnitt

Wir bestimmen die Wellen im Hohlleiter für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen a und b. Für die TM-Wellen machen wir den Produkt-Ansatz

$$E_{0,\mathrm{z}}(x,y)=f(x)g(y) \tag{19.23}$$

Einsetzen in (19.11) gibt

$$f''g + fg'' + k_\perp^2 fg = 0 \tag{19.24}$$

oder

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -k_\perp^2, \tag{19.25}$$

woraus folgt, dass f''/f und g''/g konstant sind. Da $E_{0,\mathrm{z}}$ am Rand verschwinden muss, folgt

$$E_{0,\mathrm{z}}(x,y) = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \big(\frac{n\pi}{a}\big)^2 + \big(\frac{m\pi}{b}\big)^2, \quad n \geq 1, m \geq 1. \tag{19.26}$$

Für die TE-Welle erhält man mit dem entsprechendenen Ansatz

$$B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = f(x)g(y) \tag{19.27}$$

und der Randbedingung $(\mathrm{grad}\, B_{0,\mathrm{z}})_\mathrm{n} = 0$ die Lösungen

$$B_{0,\mathrm{z}}(x,y) = B_0 \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi y}{b}), \quad k_\perp^2 = \big(\frac{n\pi}{a}\big)^2 + \big(\frac{m\pi}{b}\big)^2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n+m \geq 1. \tag{19.28}$$

19.c Wellenpakete

Vielfach hat man es nicht mit monochromatischen Wellen, sondern mit Wellenpaketen zu tun, die aus Fourierkomponenten mit $k_\mathrm{z} \approx k_{\mathrm{z},0}$ bestehen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) \int dk_\mathrm{z} f_0(k_\mathrm{z}) \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} z - \omega(k_\mathrm{z})t)}, \tag{19.29}$$

wobei $f_0(k_\mathrm{z})$ bei $k_\mathrm{z} = k_{\mathrm{z},0}$ ein Maximum hat und für andere k_z-Werte rasch abfällt. Dann entwickeln wir $\omega(k_\mathrm{z})$ um $k_{\mathrm{z},0}$

$$\omega(k_\mathrm{z}) = \omega(k_{\mathrm{z},0}) + v_\mathrm{gr}(k_\mathrm{z} - k_{\mathrm{z},0}) + \ldots \tag{19.30}$$

$$v_\mathrm{gr} = \left.\frac{d\omega(k_\mathrm{z})}{dk_\mathrm{z}}\right|_{k_\mathrm{z}=k_{\mathrm{z},0}}. \tag{19.31}$$

In linearer Näherung dieser Entwicklung folgt dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x,y) e^{i(k_{\mathrm{z},0} z - \omega(k_{\mathrm{z},0})t)} f(z - v_\mathrm{gr} t), \quad f(z - v_\mathrm{gr} t) = \int dk_\mathrm{z} f_0(k_\mathrm{z}) \mathrm{e}^{i(k_\mathrm{z} - k_{\mathrm{z},0})(z - v_\mathrm{gr} t)}. \tag{19.32}$$

Der Vorfaktor enthält die Phase $\phi = k_{\mathrm{z},0} z - \omega(k_{\mathrm{z},0})t$. Das Paket oszilliert also mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{ph} = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_\phi = \frac{\omega(k_{\mathrm{z},0})}{k_{\mathrm{z},0}}. \tag{19.33}$$

Die Ortsabhängigkeit der Amplitude steckt dagegen in der Funktion $f(z - v_\mathrm{gr} t)$. Das Wellenpaket bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit (auch Signalgeschwindigkeit) v_gr, (19.31).
Für die Wellen des Hohlleiters finden wir aus (19.19)

$$v_\mathrm{ph} = \mathrm{c} \frac{\sqrt{k_\perp^2 + k_{\mathrm{z},0}^2}}{k_{\mathrm{z},0}}, \tag{19.34}$$

$$v_\mathrm{gr} = \mathrm{c} \frac{k_{\mathrm{z},0}}{\sqrt{k_\perp^2 + k_{\mathrm{z},0}^2}}. \tag{19.35}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c, die Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Geht man bei der Entwicklung (19.30) über den linearen Term hinaus, so findet man, dass die Wellenpakete auseinanderfließen.
Aufgabe Bestimme $\omega(k)$ für Transversal-Schwingungen in einem Leiter oberhalb der Plasmafrequenz (Abschnitt 17.b) für $\epsilon = 1$ und die daraus resultierende Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.