E

Maxwell-Gleichungen

Maxwell's Equations

©2000/01 Franz Wegner Universität Heidelberg

14 Vollständige Maxwell-Gleichungen

14 Complete Set of Maxwell's Equations

14.a Widerspruchsfreiheit der Maxwell-Gleichungen

Im Abschnitt (1) haben wir die vier Maxwell-Gleichungen (1.13-1.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) && (14.1)\\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t) && (14.2)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{c}\partial t} &= \mathbf{0} && (14.3)\\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (14.4) \end{aligned}$$

angegeben. Es sind dies acht Komponentengleichungen für die insgesamt sechs Komponenten B_α und E_α. Die Gleichungen können daher nicht unabhängig voneinander sein. In der Tat bilden wir die Divergenz der ersten Gleichung und vergleichen mit der zweiten Gleichung, so finden wir

$$-\frac{1}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\dot{E} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\dot{\rho}, \qquad (14.5)$$

woraus wir sehen, dass in diesen beiden Gleichungen die Kontinuitätsgleichung (1.12) enthalten ist, und diese auch nur erfüllt werden können, wenn die Ladung erhalten ist. Zum anderen folgt daraus aber auch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0. \qquad (14.6)$$

Wenn also zu einer Zeit die Gleichung (14.2) und zu allen Zeiten die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt sind, so garantiert (14.1) dafür, dass (14.6) zu allen Zeiten erfüllt ist.

14.a Consistency of Maxwell's Equations

In section (1) we have introduced the four Maxwell's equations (1.13-1.16)

. These are eight component equations for six components B_α and E_α. Thus the equations cannot be independent from each other. Indeed calculating the divergence of the first equation and comparing it with the second equation we find

from which we see that the equation of continuity (1.12) is contained in both equations, and these equations can only be fulfilled if charge is conserved. But it also follows that

Thus if at a certain time equation (14.2) and at all times the equation of continuity is fulfilled, then equation (14.1) guarantees that (14.6) is fulfilled at all times.

Ähnlich folgt aus der Divergenz von (14.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) = 0. \tag{14.7}$$

Wenn also (14.4) zu einer Zeit erfüllt ist, so ist sie auf Grund von (14.3) zu allen Zeiten erfüllt.

Die Gleichungen (14.1) und (14.3) erlauben die Berechnung von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$, falls $\mathbf{j}$ zu allen Zeiten gegeben ist und $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ zu einer Zeit t_0 gegeben sind und zu dieser Zeit (14.2) und (14.4) erfüllt sind. ρ ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung.

Der einzige Beitrag, den wir bisher nicht betrachtet haben, ist der Beitrag proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). Er wurde von Maxwell gefunden. Er hat $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ als Verschiebungsstrom bezeichnet, da (14.1) in der Form

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{E}}) \tag{14.8}$$

geschrieben werden kann. Mit der Einführung dieses Terms wurde das Gleichungssystem (14.1-14.4) widerspruchsfrei. Gleichzeitig erlaubt dieses System dann die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

Similarly, it follows from the divergence of (14.3) that

Thus if (14.4) is fulfilled at a certain time, then due to equation (14.3) it is fulfilled at all times.

Equations (14.1) and (14.3) allow the calculation of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ if $\mathbf{j}$ is given at all times and $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ are given at a time t_0 and (14.2) and (14.4) are fulfilled at that time. Then ρ is determined by the equation of continuity.

The only contribution we have not yet considered is the contribution proportional to $\dot{\mathbf{E}}$ in (14.1). It was found by Maxwell. He called $\dot{\mathbf{E}}/(4\pi)$ displacement current, since (14.1) may be rewritten

. With the introduction of this term the system of equations (14.1-14.4) became consistent. Simultaneously this system allowed the description of electromagnetic waves.

14.b Maxwell-Gleichungen für freibewegliche Ladungen und Ströme

Die Ladungsdichte und die Stromdichte werden zerlegt (vgl. Abschnitt 6.a und 11)

$$\rho = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{P}} \tag{14.9}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \mathbf{j}_{\mathrm{P}} + \mathbf{j}_{\mathrm{M}}. \tag{14.10}$$

Dabei waren ρ_{f} und $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ die freibeweglichen Anteile, während ρ_{P} und das hier eingeführte $\mathbf{j}_{\mathrm{P}}$ die Polarisations-Anteile sind. Wir hatten für das elektrische Dipolmoment im Volumen ΔV ausgedrückt durch die Dipolmomente $\mathbf{p}_i$, die wieder durch Ladungspaare $\pm q_i$ im Abstand $\mathbf{a}_i$ dargestellt werden

$$\mathbf{P}\Delta V = \sum \mathbf{p}_i = \sum q_i \mathbf{a}_i \tag{14.11}$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}}\Delta V = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum q_i \dot{\mathbf{a}}_i \tag{14.12}$$

mit $\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{P}}$ (in ruhender Materie). Dazu kommt dann noch die in Abschnitt 11 eingeführte Magnetisierungsstromdichte

$$\mathbf{j}_{\mathrm{M}} = \mathrm{c}\operatorname{rot}\mathbf{M}. \tag{14.13}$$

14.b Maxwell's Equations for Freely Moving Charges and Currents

The density of the charges and currents are separated into (compare sections 6.a and 11)

Here ρ_{f} and $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ are the freely moving contributions, whereas ρ_{P} and the newly introduced $\mathbf{j}_{\mathrm{P}}$ are the polarization contributions. We expressed the electric dipole moment in the volume ΔV by the dipole moments $\mathbf{p}_i$, and those by the pairs of charges $\pm q_i$ at distance $\mathbf{a}_i$

with $\mathbf{j}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{P}}$ (in matter at rest). In addition, there is a current density from the magnetization as introduced in section 11

Für diese Ladungs- und Stromdichten gilt

For these charge and current densities one obtains

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{f}} = 0 \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{P}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{14.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{M}} = 0. \tag{14.16}$$

Durch Einsetzen dieser Ladungs- und Stromdichten in (14.1) ergibt sich

By inserting these charge and current densities into (14.1) one obtains

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} (\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \dot{\mathbf{P}} + \mathrm{c} \operatorname{rot} \mathbf{M}), \tag{14.17}$$

woraus

from which it follows that

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\mathrm{c} \partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_{\mathrm{f}} \tag{14.18}$$

folgt. Führen wir wieder wie in (11.8) und (6.6) das magnetische Feld $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ein, so wird (11.9) erweitert zu

. If we now introduce the magnetic field $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ and the dielectric displacement $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ in (11.8) and (6.6), eq. (11.9) becomes

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{\mathrm{c}} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} \mathbf{j}_{\mathrm{f}}. \tag{14.19}$$

Entsprechend folgt aus (14.2) wie in (6.7)

Similarly, one obtains from (14.2) as in (6.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\mathrm{f}}. \tag{14.20}$$

Die Maxwell-Gleichungen (14.3) und (14.4) bleiben unverändert.

Maxwell's equations (14.3) and (14.4) remain unchanged.

15 Energie- und Impuls-Bilanz

15.a Energie

Wir betrachten ein Volumen eines Systems mit freibeweglichen Ladungen und festgehaltener Materie. Auf die freibeweglichen Ladungen wirkt die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. Bewegen wir die Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so müssen wir dem System gegen diese Kraftdichte die Leistung $-\int d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E}$ zuführen. Wir formen nun mittels (14.19), (B.30) und (14.3) um

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E} &= -\frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} \\ &= \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Diese Beiträge interpretiert man folgendermaßen: In ruhender Materie stellt der zweite Beitrag die zeitliche Änderung der Energiedichte $u(\rho_\mathrm{m},\mathbf{D},\mathbf{B})$ dar mit

$$du = \frac{\partial u}{\partial\rho_\mathrm{m}}d\rho_\mathrm{m} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}. \tag{15.2}$$

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Energie der Materie von ihrer Massendichte ρ_m, aber nicht vom vollständigen Verzerrungszustand abhängt. Wir hatten schon früher gesehen, dass $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ gilt. Ähnlich kann man aus dem Induktionsgesetz zeigen, dass $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ für starre Materie gilt. Hier die Herleitung in Kurzform

$$\begin{aligned} \delta U_\mathrm{em} &= -\sum_j V_j^{(\mathrm{ind})}\delta t I_j = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\delta\Psi_j^\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\int d\mathbf{f}_j\cdot\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{c}}\sum_j I_j\int d\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{c}}\int d^3r\mathbf{j}_\mathrm{f}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Da die Materie festgehalten wird, trägt $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ nichts bei. Wir setzen daher für die Energie des Volumens V

$$U(V) = \int_V d^3r\,u(\rho_\mathrm{m}(\mathbf{r}),\mathbf{D}(\mathbf{r}),\mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{15.4}$$

und führen den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{15.5}$$

15 Energy and Momentum Balance

15.a Energy

We consider a volume of a system with freely moving charges and matter at rest. The force density on the freely moving charges is given by $\mathbf{k} = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/\mathrm{c})$. If the charges are moved with velocity $\mathbf{v}$, the power $-\int d^3r\mathbf{j}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{E}$ has to be fed into the system against the force density. We rewrite this expression by using (14.19), (B.30) and (14.3)

These contributions are interpreted in the following way: In matter at rest the second contribution is the temporal change of the energy density $u(\rho_\mathrm{m},\mathbf{D},\mathbf{B})$ with

For simplicity we assume that the energy of the matter depends on its density ρ_m, but not on the complete state of strain. We have seen earlier that $\partial u/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/(4\pi)$ holds. Similarly, one can show from the law of induction that $\partial u/\partial\mathbf{B} = \mathbf{H}/(4\pi)$ holds for rigid matter. We give a short account of the derivation

Since the matter is pinned, $\partial u/\partial\rho_\mathrm{m}\dot{\rho}_\mathrm{m}$ does not contribute. Therefore we write the energy of volume V as

and introduce the Poynting vector

ein. Es gilt dann

. Then one has

$$-\int_V d^3r \mathbf{j}_\mathrm{f} \cdot \mathbf{E} = \dot{U}(V) + \int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \dot{U}(V) + \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}). \tag{15.6}$$

Die dem Volumen V zugeführte Energie wird zum Teil im Volumen gespeichert ($\dot{U}$), zum anderen Teil aber durch die Oberfläche des Systems transportiert. Dieser Energietransport ist durch die Energiestromdichte $\mathbf{S}$ gegeben. Ähnlich wie durch eine Fläche pro Zeiteinheit die Ladung $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ transportiert wird, wird (in ruhender Materie) die Energie $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ transportiert. Der Poynting-Vektor gibt daher die elektromagnetische Energiestromdichte an.

The energy added to volume V is partially stored in the volume. This stored part is given by ($\dot{U}$). Another part is transported through the surface of the system. This transport of energy is given by the energy current through the surface expressed by the surface integral over $\mathbf{S}$. Similar to the transport of the charge $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}_\mathrm{f}$ through a surface per unit time, one has (in matter at rest) the energy transport $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ through a surface. Thus the Poynting vector is the density of the electromagnetic energy current.

Wir bemerken, dass für $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

We note that for $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ one obtains

$$u = u^0(\rho_\mathrm{m}) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \tag{15.7}$$

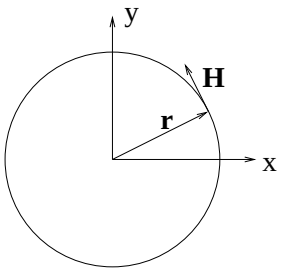
folgt.

.

Beispiel: Stromdurchflossener gerader Leiter

Example: Current-carrying straight wire

Wir betrachten einen vom Strom I durchflossenen geraden Draht in Richtung der z-Achse. Auf Grund des Amereschen Gesetzes gilt bei Integration auf einem konzentrischen Kreis mit Radius r um den Leiter



We consider a straight wire which carries the current I in the direction of the z-axis. Due to Ampere's law the integral along a concentric circle with radius r around the conductor yields

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}} I, \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{\mathrm{c}r}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.8}$$

Längs des Leiters bestehe auf Grund des ohmschen Widerstandes ein Spannungsabfall $V^{(\mathrm{R})}$, verknüpft mit einem elektrischen Feld parallel zum Draht, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_\mathrm{z}$. Daraus folgt der Poynting-Vektor

There is a voltage drop along the wire due to the ohmic resistance $V^{(\mathrm{R})}$, which is related to the electric field parallel to the wire, $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_\mathrm{z}$. This yields the Poynting-vector

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{IE_0\mathbf{e}_\mathrm{r}}{2\pi r} \tag{15.9}$$

mit einem Energiefluss

with the energy flux

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = -IE_0 l = -IV^{(\mathrm{R})} \tag{15.10}$$

durch den Zylindermantel des Drahtes über die Länge l nach außen. Mit anderen Worten, es fließt in den Draht die ohmsche Leistung $IV^{(\mathrm{R})}$. Diese wird im Draht in Wärme umgewandelt.

through the lateral surface of the cylinder of the wire of length l in outward direction. In other words, the ohmic power $IV^{(\mathrm{R})}$ flows into the wire. There it is transformed into heat.

15.b Impuls-Bilanz

Wir führen die Impuls-Bilanz nur für das Vakuum mit Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\mathbf{j}$ durch. Wir wollen das System in Ruhe halten. Dann müssen wir gegen die Kraftdichte $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/\mathrm{c}$ eine Gegenkraftdichte $-\mathbf{k}$ wirken lassen, so dass einem Volumen V pro Zeiteinheit der Impuls $-\int_V d^3r\,\mathbf{k}$ zugeführt wird. Wir formen nun wieder mit (14.1) und (14.3) um

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

Mit (14.3) und (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} && (15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (15.13) \end{aligned}$$

folgt

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

Nun ist

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

Wir haben hier Größen, auf die der ∇-Operator nicht wirkt, mit einem Index $_\mathrm{c}$ gekennzeichnet. Im letzten Term des obigen Ausdrucks wirkt der ∇-Operator tatsächlich auf beide Faktoren $\mathbf{E}$. Damit können wir schreiben

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\mathbf{E} \times \mathbf{B}, && (15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). && (15.18) \end{aligned}$$

Dabei wird $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ als die Strahlungsimpulsdichte bezeichnet, und $T_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors, dessen elektrostatischen Anteil wir bereits in der Elektrostatik (8.38) kennengelernt haben. Mit diesen Größen gilt dann

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\,\mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}\,df_\beta. \tag{15.19}$$

15.b Momentum Balance

We consider the momentum balance only for the vacuum with charge densities ρ and current densities $\mathbf{j}$. If we keep the system at rest, a force density $-\mathbf{k}$ has to act against the Lorentz force density $\mathbf{k} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/\mathrm{c}$, so that the momentum $-\int_V d^3r\,\mathbf{k}$ is added to the volume V per unit time. We transform by means of (14.1) and (14.3)

$$-\mathbf{k} = -\rho\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}. \tag{15.11}$$

With (14.3) and (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \mathrm{c}\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} && (15.12)\\ \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (15.13) \end{aligned}$$

one obtains

$$-\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\dot{} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}). \tag{15.14}$$

One has

$$\mathbf{E}_\mathrm{c} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}_\mathrm{c}) - \mathbf{E}_\mathrm{c}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{15.15}$$

We have indicated quantities on which the ∇-operator does not act with an index $_\mathrm{c}$. The ∇-operator acts on both factors $\mathbf{E}$ in the last term of the expression above. Then we may write

$$-\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_\mathrm{s} - \nabla_\beta T_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_\alpha, \tag{15.16}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\mathrm{s} &= \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\mathbf{E} \times \mathbf{B}, && (15.17)\\ T_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{8\pi}(E^2 + B^2). && (15.18) \end{aligned}$$

Here $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ is called the density of the electromagnetic momentum and $T_{\alpha,\beta}$ are the components of the electromagnetic stress tensor, whose electrostatic part (8.38) we already know. With these quantities we have

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = -\int_V d^3r\,\mathbf{k} + \int_{\partial V} \mathbf{e}_\alpha T_{\alpha,\beta}\,df_\beta. \tag{15.19}$$

Dies ist die Impuls-Bilanz für das Volumen V. Die linke Seite stellt die zeitliche Änderung des Impulses im Volumen V dar, die rechte Seite den zugeführten Impuls. Er besteht aus zwei Anteilen: Der erste ist der Impuls, den wir hinzufügen, indem wir gegen die elektromagnetische Kraftdichte $\mathbf{k}$ eine Gegenkraft wirken lassen. Der zweite Anteil wirkt in Form von Spannungen an der Oberfläche. Man kann ihn auch als Fluss des Impulses betrachten. Der Spannungstensor stellt bis auf das Vorzeichen eine Impulsflussdichte dar. Er trägt zwei Indices. Einer (α) bezieht sich auf die Komponente des Impulses, der andere (β) auf die Richtung des Flusses.

This is the momentum balance for the volume V. The left handside gives the rate of change of momentum in the volume V, the right handside the rate of momentum added to the volume. It consists of two contributions: the first one is the momentum which is added by the action of the reactive force against the Lorentz force density $\mathbf{k}$. The second contribution acts by means of stress on the surface. It may also be considered as a flux of momentum through the surface. Thus the stress tensor is apart from its sign the density of momentum flux. It carries two indices. One (α) relates to the components of momentum, the other one (β) to the direction of the flux.

Wir haben hier nur den elektromagnetischen Impuls im Vakuum behandelt, während wir die elektromagnetische Energie auch in Materie untersucht haben. Warum ist es schwieriger, den Impuls in Materie zu behandeln? In beiden Fällen haben wir das System in Ruhe untersucht. Hält man die Materie fest, so tragen die dabei aufgewendeten Kräfte nicht zur Energie-Bilanz bei. Schließlich ist die Leistung als Kraft mal Geschwindigkeit gegeben. Da die Geschwindigkeit der Materie gleich Null ist, trägt die auf die Materie wirkende Kraft nicht zur Energie-Bilanz bei. Anders ist es bei der Impuls-Bilanz. Da tragen alle Kräfte bei. Man könnte daran denken, von einem kräftefreien Zustand auszugehen. Dann tritt allerdings das Problem auf, dass bei Verschiebung der freibeweglichen Ladungen überall in der Materie Kräfte auftreten können, die wir erst kennen müssten. Daher können wir hier die Energie-Bilanz in Materie behandeln, hätten aber mit der Impuls-Bilanz Probleme.

We have only considered the electromagnetic momentum in vacuum, whereas we have considered the electromagnetic energy also in matter. Why is it more difficult to determine momentum in matter? In both cases we consider the system at rest. If one pins the matter, the acting forces do not contribute to the balance of energy, since the power is given by force times velocity. Since velocity vanishes, the forces acting on the matter do not contribute to the balance of the energy. This is different for the balance of momentum. There all forces contribute. One could imagine starting out from a force-free state. Then, however, we have the problem that by moving the free charges, forces will appear which we would have to know. Therefore we can consider here the energy balance in matter, whereas the momentum balance in matter would be more difficult.

In der Literatur gibt es widersprüchliche Aussagen: Minkowski hat 1908 für den elektromagnetischen Impuls in Materie $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ angegeben. Man findet dies auch im Lehrbuch von Sommerfeld (allerdings mit Einschränkungen). Andererseits gibt Abraham 1910 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$ an. Man findet dies auch im Lehrbuch von Landau und Lifschitz.

In literature there are inconsistent statements: In 1908 Minkowski gave $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ for the electromagnetic momentum density in matter. This can also be found in the book by Sommerfeld (however with words of caution). On the other hand in 1910 Abraham gave $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/(4\pi c)$. This is also found in the textbook by Landau and Lifshitz.

Tatsächlich sind zwei Dinge zu beachten, die häufig nicht berücksichtigt werden:
1) Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie muss berücksichtigt werden. Die Materie kann nicht als starr angenommen werden.

There are two points to be considered, which are often overlooked:
i) The interaction between the electromagnetic field and matter has to be taken into account. Matter cannot be considered rigid.

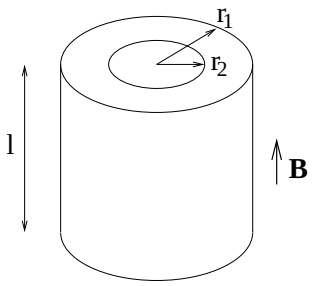
2) Man muss genau definieren, was man unter dem elektromagnetischen Impuls versteht, da man sonst alles in den unbekannten Rest mechanischen Impuls schieben kann, also keine Aussage gemacht hat.
Ohne Herleitung sei nur angegeben, dass man ein System modellieren kann, dem man entnimmt: Im lokalen Ruhesystem der Materie ist die Impulsdichte $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi\mathrm{c}) = \mathbf{S}/\mathrm{c}^2$. Allerdings kann man zeigen, dass es in homogener Materie eine weitere Erhaltungsgröße auf Grund dieser Homogenität gibt, die im lokalen Ruhesystem den Wert $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi\mathrm{c})$ annimmt. Vollzieht man Sommerfelds Argument nach, so stellt man in der Tat fest, daß es sich nur für eine ortsunabhängige Dielektrizitätskonstante ϵ durchführen lässt.

ii) One has to define precisely what is meant by the electromagnetic momentum, since otherwise any difference can be attributed to the mechanical momentum and the statement is empty.

Without derivation it should just be mentioned that a model system can be given which yields the following: The momentum density in the local rest system is $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/(4\pi\mathrm{c}) = \mathbf{S}/\mathrm{c}^2$. However, in homogeneous matter there is a further conserved quantity which in the local rest system is given by $\mathbf{D}\times\mathbf{B}/(4\pi\mathrm{c})$. If one goes through Sommerfeld's argument, one realizes, that it can be carried through only for a space-independent dielectric constant ϵ.

Beispiel: Zylinderkondensator im Magnetfeld

Wir betrachten einen Zylinderkondensator der Länge l mit Außenradius r_1 und Innenradius r_2 mit einer Ladung q außen und $-q$ innen. Zwischen den beiden Zylindern sei Vakuum. Parallel zur Achse sei ein Magnetfeld B_0. Dann haben wir in Zylinderkoordinaten



Example: Cylindric capacitor in a magnetic field

We consider a cylindric capacitor of length l with outer radius r_1 and inner radius r_2 with charge q outside and $-q$ inside. We assume that between both cylinders is vacuum. Parallel to the axis be a magnetic field B_0. Then one has in cylinder coordinates

$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{lr}\mathbf{e}_\mathrm{r}, \quad \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_\mathrm{z}, \quad \mathbf{g}_\mathrm{s} = \frac{1}{4\pi\mathrm{c}}\frac{2qB_0}{lr}\mathbf{e}_\phi. \tag{15.20}$$

Daraus errechnet sich ein Drehimpuls $\mathbf{L}$ in z-Richtung

From this we calculate the angular momentum $\mathbf{L}$ in z-direction

$$L_\mathrm{z} = \int dz d^2r(\mathbf{r}\times\mathbf{g}_\mathrm{s})_\mathrm{z} = \int dz d^2r r\frac{2qB_0}{4\pi\mathrm{c}lr} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2). \tag{15.21}$$

Wenn wir den Kondensator nun entladen, dann muss der Entladungsstrom durch das Magnetfeld fließen. Dabei wirkt die Lorentz-Kraft, die dem System ein mechanisches Drehmoment $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$ gibt

If the capacitor is decharged, the decharging current flows through the magnetic field. Then the Lorentz force acts which gives the system a mechanical torque $\mathbf{M}_\mathrm{mech}$

$$\mathbf{M}_\mathrm{mech} = \int d^3r\,\mathbf{r}\times(\frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int \mathbf{r}\times(d\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = \frac{I}{\mathrm{c}}\int((\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})d\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})\mathbf{B}), \tag{15.22}$$

woraus sich

from which one obtains

$$M_\mathrm{mech,z} = -\frac{IB_0}{\mathrm{c}}\int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{IB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.23}$$

und damit der mechanische Drehimpuls

and thus the mechanical angular momentum

$$L_\mathrm{z} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.24}$$

errechnet. Durch die Entladung wurde also der elektromagnetische Drehimpuls (15.21) in mechanischen (15.24) umgewandelt. Anstatt den Kondensator zu entladen, kann man auch das Magnetfeld abschalten. Dabei wird eine elektrische Feldstärke

. Thus the electromagnetic angular momentum (15.21) is transformed into a mechanical angular momentum during decharging. Instead of decharging the capacitor one may switch off the magnetic field. Then the electric field

$$\oint \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \int \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \pi r^2 \dot{B}_0, \quad \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})} = -\frac{1}{2\mathrm{c}} r \dot{B}_0 \mathbf{e}_\phi \tag{15.25}$$

induziert, die auf die Ladungen ein Drehmoment

is induced, which exerts the torque

$$\mathbf{M}_{\mathrm{mech}} = q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_1) - q\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E}^{(\mathrm{ind})}(\mathbf{r}_2) \tag{15.26}$$

$$M_{\mathrm{mech,z}} = qr_1(-\frac{1}{2\mathrm{c}} r_1 \dot{B}_0) - qr_2(-\frac{1}{2\mathrm{c}} r_2 \dot{B}_0) \tag{15.27}$$

ausübt, so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente

so that the capacitor receives the mechanical component of the angular momentum

$$L_{\mathrm{z}} = \frac{qB_0}{2\mathrm{c}}(r_1^2 - r_2^2) \tag{15.28}$$

erhält. In beiden Fällen wird also der elektromagnetische Drehimpuls in den gleichen mechanischen Drehimpuls umgewandelt.

. In both cases the electromagnetic angular momentum is transformed into a mechanical one.