15 Exakte Renormierungsgruppe — 15 Exact Renormalization Group

In den letzten Jahren wurde ein Verfahren der Renormierung unter der Bezeichnung 'Exakte Renormierungsgruppe' vor allem auch von Ch. Wetterich entwickelt. (Siehe z.B. Kapitel 2 in J. Berges, N. Tetradis, Ch. Wetterich, Non-Perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0005122, Phys.Rept. 363 (2002) 223-386). Dies heißt nicht, dass die anderen Verfahren nicht exakt wären. Auch bei der exakten Renormierungsgruppe werden in praktischer Anwendung Näherungen gemacht. Ein großer Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass man es auch auf die Dimension $d = 3$ direkt anwenden kann, wobei vielfach numerische Integrationen sehr erfolgreich durchgeführt werden. Ich folge den ersten Kapiteln dieser Arbeit auszugsweise.

Bei diesem Verfahren wird zur Wechselwirkung H noch ein infraroter Abschneideterm $\Delta H_k(S)$ addiert

$$W_k(J) = \ln Z_k(J) = \ln \int [\mathrm{D}S] \exp(-H(S) + JS - \Delta H_k(S)). \tag{15.1}$$

Diese zusätzliche Wechselwirkung ist quadratisch in den Feldern

$$\Delta H_k(S) = \frac{1}{2} \int_q R_k(q) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \tag{15.2}$$

und wird so gewählt, dass er im Limes $k \to 0$ verschwindet und für große k beliebig ansteigt. Für $q \ll k$ ist $R_k(q) \approx k^2$, während $R_k(q)$ für $q \gg k$ verschwindend klein wird. Beispielsweise wählt man

$$R_k(q) = \frac{q^2}{\mathrm{e}^{q^2/k^2} - 1}. \tag{15.3}$$

Unter dem Renormierungsfluss beginnt man mit einem großen $k = \Lambda$ und lässt dann k gegen 0 gehen. Man führt nun eine Legendre-Transformation durch, führt also den Ordnungsparameter

$$M(\mathbf{x}) = \langle S(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\delta W_k(J)}{\delta J(\mathbf{x})} \tag{15.4}$$

ein, wobei dieser jetzt bezüglich $H + \Delta H_k - JS$ zu bestimmen ist, und transformiert

$$\Gamma_k(M) = \int \mathrm{d}^d x J(\mathbf{x}) M(\mathbf{x}) - W_k(J) - \Delta H_k(M), \tag{15.5}$$

wobei der $\Delta H_k(M)$-Term addiert wurde.

15.a Die exakte Flussgleichung — 15.a The exact Flow Equation

Wir leiten nun die exakte Flussgleichung her. Dies ist nun keine Gleichung, die H transformiert wie bei Wilson. Vielmehr wird die gemittelte Wirkung Γ_k in Abhängigkeit von k transformiert. Zur Herleitung gehen wir aus von

$$\tilde{\Gamma}_k(M) = \Gamma_k(M) + \Delta H_k(M). \tag{15.6}$$

Wir differenzieren nach k und erhalten

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_k(M)}{\partial k} = -\frac{\partial W_k(J)}{\partial k} - \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{\partial J(x)}{\partial k} \frac{\delta W_k(J)}{\delta J(\mathbf{x})} - M(\mathbf{x}) \frac{\partial J(x)}{\partial k} \right). \tag{15.7}$$

Wegen (15.4) heben sich die Beiträge unter dem Integral gegenseitig weg. Für die k-Ableitung von W erhalten wir aus (15.1)

$$\frac{\partial W_k}{\partial k} = -\langle \frac{\partial \Delta H_k}{\partial k} \rangle = -\frac{1}{2} \int_q \frac{\partial R_k(q)}{\partial k} \langle S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \rangle \tag{15.8}$$

Diese Korrelation zerlegen wir nun in den zusammenhängenden und den zerfallenden Anteil

$$\langle S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \rangle = G_c^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + M(\mathbf{q}) M(-\mathbf{q}). \tag{15.9}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_k}{\partial k} = -\frac{1}{2} \int_q \frac{\partial R_k(q)}{\partial k} \left(G_c^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + M(\mathbf{q}) M(-\mathbf{q}) \right) \tag{15.10}$$

und

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial R_k(q)}{\partial k} G_c^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}). \tag{15.11}$$

Die zweite Ableitung von $\tilde{\Gamma}$ nach M und die zweite Ableitung von W nach J sind invers zueinander. Da $G_c^{(2)}$ mit der zweiten Ableitung von W übereinstimmt und $\tilde{\Gamma}$ durch (15.6) gegeben ist, folgt die Flussgleichung

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left((\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \frac{\partial R_k}{\partial k} \right), \tag{15.12}$$

wobei das $\Gamma_k^{(2)}$ hier für die zweite Ableitung von Γ_k nach M steht und selbst noch von M abhängt,

$$\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta M(\mathbf{q}) \delta M(\mathbf{q}')} \tag{15.13}$$

und R als Kern

$$R_k(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') R_k(q) \tag{15.14}$$

zu interpretieren ist.

15.b Flussgleichung für Potential 15.b Flow Equation for Potential

Wir wollen nun die gemittelte Wirkung für ein $O(N)$-symmetrisches Modell in folgender Weise nähern

$$\Gamma_k(M) = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2} Z_k(\rho) (\nabla \mathbf{M})^2 + U_k(\rho) \right), \tag{15.15}$$

wobei wir ein N-komponentiges Feld betrachten und

$$\rho = \frac{1}{2} M^2 \tag{15.16}$$

einführen. Die zweite Ableitung des Potentials ergibt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial M_\alpha \partial M_\beta} = M_\alpha M_\beta U'' + \delta_{\alpha\beta} U'. \tag{15.17}$$

Die Matrix dieser zweiten Ableitungen hat einen Eigenwert $U' + 2\rho U''$ (longitudinale Mode) und $N-1$ Eigenwerte U' (transversale Moden).

Ersetzen wir Z durch einen von ρ und q unabhängigen Wert, so folgt für den Fluss des Potentials U

$$\partial_t U_k(\rho) = \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k \left(\frac{N-1}{K_0} + \frac{1}{K_1} \right) \tag{15.18}$$

mit $t = \ln(k/\Lambda)$ und

$$\begin{aligned} K_0(\rho, q^2) &= Z_k(\rho, q^2) + R_k(q) + U_k'(\rho), & (15.19) \\ K_1(\rho, q^2) &= Z_k(\rho, q^2) + R_k(q) + U_k'(\rho) + 2\rho U_k''. & (15.20) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\partial_t U_k(\rho) = 2k^d \left((N-1) l_0^d \left(\frac{U_k'(\rho)}{Z_k k^2} \right) + l_0^d \left(\frac{U_k'(\rho) + 2\rho U_k''(\rho)}{Z_k k^2} \right) \right) \tag{15.21}$$

mit der dimensionslosen Schwellenfunktion

$$l_0^d(w) = \frac{1}{4k^d}\int_q \frac{\partial_t(R_k(q)/Z_k)}{q^2+Z_k^{-1}R_k(q)+k^2w}, \tag{15.22}$$

die nur von der renormierten Masse $w = m^2/(Zk^2)$ abhängt (Berges et al. haben noch einen Faktor v_d^{-1} in l_n^d hineindefiniert). Dieses l_0 verschwindet rasch für $w \gg 1$, so dass Massen m^2/Z groß gegen k^2 nicht mehr wesentlich beitragen.

Hinzu kommt noch eine Gleichung für $Z_k(\rho)$, die wir hier nicht herleiten, die aber in Berges et al. in Abschnitt 3.1 und 3.5 nachgelesen werden kann. Dieses Z_k bestimmt den Exponenten $\eta = -\partial_t Z_k$.

15.c Das biquadratische Potential 15.c The quartic Potential

Im einfachsten Fall gehen wir aus von einem biquadratischen Potential

$$U_k(\rho) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_k(\rho-\rho_0(k))^2. \tag{15.23}$$

Da U' bei ρ_0 verschwindet gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k'(\rho_0(k)) = \partial_t U_k'(\rho_0(k)) + U_k''(\rho_0(k))\partial_t\rho_0(k). \tag{15.24}$$

Berücksichtigen wir, dass $U_k'' = \bar{\lambda}_k$ und die Ableitungen der Funktionen l_0^d nach ρ in (15.21)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}l_0^d\left(\frac{U_k'(\rho)}{Z_kk^2}\right) &= -\frac{U_k''(\rho)}{Z_kk^2}l_1^d\left(\frac{U_k'(\rho)}{Z_kk^2}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}l_0^d\left(\frac{U_k'(\rho)+2\rho U_k''(\rho)}{Z_kk^2}\right) &= -\frac{3U_k''(\rho)+2\rho U'''}{Z_kk^2}l_1^d\left(\frac{U_k'(\rho)+2\rho U_k''(\rho)}{Z_kk^2}\right), \\
l_1^d(w) &:= -\frac{\mathrm{d}l_0^d(w)}{\mathrm{d}w}
\end{aligned} \tag{15.25}$$

ergeben, so folgt für $\rho = \rho_0$

$$\partial_t\rho_0 = 2k^{d-2}Z_k^{-1}\left(3l_1^d\left(\frac{2\rho_0\bar{\lambda}}{Z_kk^2}\right)+(N-1)l_1^d(0)\right). \tag{15.26}$$

Dieser Gleichung entnimmt man, dass $\rho_0(k)$ mit fallendem k immer abnimmt. Wenn $\rho_0(k)$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert geht, ist das System in der symmetriegebrochenen Phase, das heißt unterhalb T_c. Verschwindet ρ_0 bei einem endlichen Wert von k, so kann man für kleinere Werte mit dem Ansatz $U_k(\rho) = m_k^2\rho + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_k\rho^2$ fortsetzen. Das System ist dann in der symmetrischen Phase oberhalb T_c.

Führt man dimensionslose Kopplungen

$$\kappa = Z_kk^{2-d}\rho_0, \quad \lambda = Z_k^{-2}k^{d-4}\bar{\lambda} \tag{15.27}$$

ein, so folgt das dimensionslose Potential

$$u = k^{-d}U_k = \frac{1}{2}\lambda(\tilde{\rho}-\kappa)^2, \quad \tilde{\rho} := Z_kk^{2-d}\rho. \tag{15.28}$$

und man erhält die beiden Flussgleichungen

$$\partial_t\kappa = \beta_\kappa = (2-d-\eta)\kappa + 2\left(3l_1^d(2\lambda\kappa)+(N-1)l_1^d(0)\right), \tag{15.29}$$

$$\partial_t\lambda = \beta_\lambda = (d+4-2\eta)\lambda + 2\lambda^2\left(9l_2^d(2\lambda\kappa)+(N-1)l_2^d(0)\right), \tag{15.30}$$

$$l_2^d(w) := -\frac{\mathrm{d}l_1^d(w)}{\mathrm{d}w}, \tag{15.31}$$