14.e Massenrenormierung 14.e Mass Renormalization

Wir betrachten die kritische Theorie ($T = T_c$) und haben über den Koeffizienten vor S^2 in H nur insoweit verfügt, als wir $\Gamma^{(2)}(0) = 0$ forderten. Ohne tatsächlich auf die massive Theorie ($T \neq T_c$) einzugehen, wollen wir betrachten, was mit S^2 unter der Renormierung passiert. Hierzu betrachten wir Korrelationen sowohl der S^2 wie auch der S

$$G^{(L,N)}(\mathbf{q}_1, ...\mathbf{q}_L; \mathbf{p}_1, ...\mathbf{p}_N) = \langle (S^2)_{\mathbf{q}_1}, ...(S^2)_{\mathbf{q}_L} S_{\mathbf{p}_1} ... S_{\mathbf{p}_N} \rangle, \quad (S^2)_{\mathbf{q}} := \int_k S_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}, \tag{14.63}$$

wobei wir verlangen, dass keiner der Wellenvektoren $\mathbf{q}_i$ verschwindet. Sonst ist noch der konstante Anteil im Eigenoperator O_E zu berücksichtigen. Es ist noch anzumerken, dass weder S mit O_h noch O_E mit S^2 übereinstimmt. Die Abweichungen sind aber abgesehen von der gerade erwähnten Konstanten Operatoren, deren y in $d = 4$ um mindestens 2 kleiner sind, so dass sie in führender Ordnung nichts beitragen. Unter dem Umskalen und der anschließenden Wilson-Renormierung erhält man

$$G_\Lambda^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = b^{N(x-x_h)+L(2x-x_E)} G_\mu^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{14.64}$$

ähnlich wie vorher schon für die $G^{(N)}$. Betrachten wir nun die Einteilchen-irreduziblen Beiträge, wobei wieder die N Beine der Propagatoren $G^{(2)}(\mathbf{p})$ amputiert sind

$$\Gamma^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \sim \prod_{i=1}^{N} \left(G^{(2)}(\mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i) \right)^{-1} G^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{14.65}$$

so folgt

$$\Gamma_\Lambda^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = b^{-N(x-x_h)+L(2x-x_E)} \Gamma_\mu^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{14.66}$$

Wenn ich nun für b^x wieder (14.23) substituiere und zunächst $x_h = (d - 2 + \eta)/2$ und $x_E = d - y_E = d - 1/\nu$ einsetze, so bleibt

$$b^{-N(x-x_h)+L(2x-x_E)} = (Zb^\eta)^{N/2-L} b^{L(-2+1/\nu+\eta)}. \tag{14.67}$$

Tatsächlich hängen η und ν von $g_0(\Lambda)$ ab. Wir führen daher neben der Renormierung Z, (14.28) noch die Massen-Renormierung

$$Z_2 = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}(\ln \Lambda)(2-1/\nu(g_0(\Lambda))-\eta(g_0(\Lambda)))} \tag{14.68}$$

ein. Um einen endlichen Grenzwert für $\Gamma^{(L,N)}$ im Limes $\Lambda \to \infty$ zu erhalten, müssen wir daher noch jeden Faktor S^2 mit Z_2 multiplizieren,

$$Z_2^L \Gamma_\Lambda^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Gamma_\mu^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{14.69}$$

Der Definition von Z_2 entnehmen wir

$$2 - 1/\nu(g_0) = \frac{\mathrm{d} \ln(Z_2/Z)}{\mathrm{d} \ln \Lambda}|_{g,\mu}. \tag{14.70}$$

Gehen wir zur nackten Funktion Γ_b auf der Skala Λ über, das heißt, wir lassen die Faktoren Z weg, so folgt in Verallgemeinerung von (14.31)

$$Z_2^L Z^{N/2-L} \Gamma_\mathrm{b}^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Gamma_\mathrm{R}^{(L,N)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{14.71}$$

Speziell für $L = 1$, $N = 2$ erhalten wir

$$Z_2 \Gamma_\mathrm{b}^{(1,2)} = \Gamma_\mu^{(1,2)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{14.72}$$

Bis zur ersten Ordnung in g_0 ist

$$\Gamma_\Lambda^{(1,2)}(\mathbf{q}; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 1 - \frac{g_0 \Lambda^\epsilon}{2} I_\Lambda(q) \tag{14.73}$$

und damit

$$Z_2^{-1} = \Gamma^{\text{div}(1,2)}(\mathbf{q};\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = 1 - \frac{g_0\Lambda^\epsilon}{2} I_\Lambda^{\text{div}}(q) = 1 + \frac{g_0}{16\pi^2\epsilon} + O(g_0^2). \tag{14.74}$$

Drücken wir nun g_0 durch g, (14.59) aus, setzen in (14.70) ein und substituieren zurück, so erhalten wir

$$2 - \frac{1}{\nu(g_0)} = -\frac{g_0}{16\pi^2}, \quad \nu(g^*_{\text{n.triv}}) = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{12}. \tag{14.75}$$

Dabei wurde verwendet, dass es zu η in Ordnung g_0 keine Korrektur gibt.