14 Konventionelle Renormierung

14 Conventional Renormalization

14.a Regularisierung

14.a Regularization

Das Verfahren der Renormierung entstand aus der Beobachtung, dass die störungstheoretische Berechnung von Diagrammen auf Divergenzen führt. Startet man etwa mit

$$H = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2}(\nabla S)^2 + \frac{m_0^2}{2} S^2 + \frac{g_0}{24} S^4 \right), \tag{14.1}$$

so erhalten wir in erster Ordnung in g_0 für $\Gamma^{(2)}$

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \int_k \frac{1}{m_0^2 + k^2}, \tag{14.2}$$

was für $d \geq 2$ divergiert. Ähnlich findet man

$$\Gamma^{(4)}(p_i = 0) = g_0 - \frac{3g_0^2}{2} \int_k \frac{1}{(m_0^2 + k^2)^2}, \tag{14.3}$$

was für $d \geq 4$ ebenfalls divergiert. Diese Divergenz tritt bei großen Impulsen auf. Man regularisiert daher den Propagator $G_0^{(2)}(p) = 1/(m_0^2 + p^2)$, indem man dafür sorgt, dass er für große Impulse hinreichend rasch abfällt.

Eine Möglichkeit ist,

$$G_{0\Lambda}^{(2)}(p) = \int_0^\infty (1 - \rho(\Lambda^2 x)) \exp(-x(p^2 + m_0^2)) \tag{14.4}$$

mit geeigneter Funktion ρ einzuführen,

$$\lim_{z \to \infty} \rho(z) = 0, \quad \lim_{z \to 0} \rho(z) = 1. \tag{14.5}$$

Es genügt häufig, $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$ zu wählen (besser ist $\rho(x) = 1 + O(x^k)$ mit $k > 1$). Dann folgt

$$\begin{aligned} G_{0\Lambda}^{(2)}(p) &= \int_0^\infty (\exp(-x(p^2 + m_0^2)) - \exp(-x(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2))) \\ &= \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + m_0^2 + \Lambda^2} = \frac{\Lambda^2}{(p^2 + m_0^2)(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2)} \end{aligned} \tag{14.6}$$

oder man wählt

$$G_{0\Lambda}^{(2)}(p) = \frac{1}{m_0^2 + p^2 + \frac{p^4}{\Lambda^2}} \tag{14.7}$$

14.b Renormierung

14.b Renormalization

Wir setzen nun die Hamilton-Funktion

$$H_\Lambda = \int_\Lambda \mathrm{d}^d x \left(\frac{a_0}{2} (\nabla S)^2 + \frac{a_1}{2} S^2 + \frac{a_2}{24} S^4 \right) \tag{14.8}$$

an, wobei der Index $_\Lambda$ angibt, dass wir den Propagator in der Gegend von Λ abschneiden. Dabei betrachtet man den Limes $\Lambda \to \infty$, wobei allerdings die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 von Λ abhängen. Diese

Abhängigkeit wird nun so gewählt, dass drei vorgegebene Werte der Γ bestimmte Werte annehmen (Normierungs-Bedingungen) und zwar typischerweise für die masselose, das heißt kritische Theorie

$$\Gamma^{(2)}(p=0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}=1, \quad \Gamma^{(4)}(p)\Big|_{\mathrm{SP}(\mu)}=g \tag{14.9}$$

mit dem symmetrischen Punkt $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j=\mu^2(4\delta_{ij}-1)/3$ und für die massive Theorie

$$\Gamma^{(2)}_{p\to 0}(p)=m^2+p^2, \quad \Gamma^{(4)}(p_i=0)=g. \tag{14.10}$$

Dabei werden g und die Impulse μ bzw. m festgehalten. Die Behauptung ist, dass in diesem Grenzfall auch alle anderen $\Gamma^{(N)}(p_i)$ gegen einen endlichen Grenzwert gehen.

14.b.α Umskalierung

14.b.α Rescaling

Wir wollen diese Aussage nun auf Grund der Wilsonschen Renormierung verstehen. Dazu wollen wir zunächst H_Λ umskalen auf einen endlichen Abschneideimpuls, z.B. μ und anschließend die Wilson-Renormierung anwenden.

Zunächst skalen wir um. Mit

$$S(\mathbf{r})=b^x S'(b\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}'=b\mathbf{r}, \quad \Lambda=b\mu. \tag{14.11}$$

folgt der neue Hamilton-Operator

$$H'_\mu=\int_\mu \mathrm{d}^d r' \left(\frac{a_0}{2}b^{-d+2+2x}(\nabla' S')^2+\frac{a_1}{2}b^{-d+2x}S'^2+\frac{a_2}{24}b^{-d+4x}S'^4-hb^{-d+x}S'\right). \tag{14.12}$$

Für die zugehörigen Korrelationen folgt

$$G^{(N)}_\Lambda(\mathbf{r}_1,...\mathbf{r}_N)=\langle S(\mathbf{r}_1)...S(\mathbf{r}_N)\rangle_\Lambda=b^{Nx}\langle S(b\mathbf{r}_1)...S(b\mathbf{r}_N)\rangle'_\mu=b^{Nx}G^{(N)\prime}_\mu(b\mathbf{r}_1,...b\mathbf{r}_N). \tag{14.13}$$

Aus dem Zusammenhang zwischen G und Γ leitet man her (man betrachte zuerst $G^{(2)}$ und $\Gamma^{(2)}$)

$$\Gamma^{(N)}_\Lambda(\mathbf{r}_1,...\mathbf{r}_N)=b^{N(d-x)}\Gamma^{(N)\prime}_\mu(b\mathbf{r}_1,...b\mathbf{r}_N). \tag{14.14}$$

Aus

$$G^{(N)}(\mathbf{k}_1,...\mathbf{k}_N)=\int \mathrm{d}^d r_1...\mathrm{d}^d r_{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1+...\mathbf{k}_N\mathbf{r}_N)}G^{(N)}(\mathbf{r}_1,...\mathbf{r}_N), \quad \sum_i \mathbf{k}_i=\mathbf{0}. \tag{14.15}$$

folgt

$$G^{(N)}_\Lambda(\mathbf{k}_1,...\mathbf{k}_N)=b^{Nx-(N-1)d}G^{(N)\prime}_\mu(\frac{\mathbf{k}_1}{b},...\frac{\mathbf{k}_N}{b}). \tag{14.16}$$

Ähnlich erhält man

$$\Gamma^{(N)}_\Lambda(\mathbf{k}_1,...\mathbf{k}_N)=b^{-Nx+d}\Gamma^{(N)\prime}_\mu(\frac{\mathbf{k}_1}{b},...\frac{\mathbf{k}_N}{b}). \tag{14.17}$$

14.b.β Wilson-Renormierung

14.b.β Wilson Renormalization

Als nächstes wenden wir die Wilson-Renormierung auf H'_μ an und zwar mit dem Skalenfaktor $b\mathrm{e}^l=\Lambda/\mu$, also

$$H_\mu=\mathrm{e}^{\mathcal{G}l}H'_\mu=b^{\mathcal{G}}H'_\mu. \tag{14.18}$$

Nach Durchführung dieser Wilson-Renormierung sind nämlich die Ortsvektoren von $b\mathbf{r}_i$ wieder auf $\mathbf{r}_i$ geschrumpft und die Wellenvektoren wieder von $\mathbf{k}_i/b$ auf $\mathbf{k}_i$ angewachsen. Falls wir mit

$$H'_\mu=H(g_i^{\mathrm{s}})+\sum_i \lambda_i S_i(b\mathbf{r}_i) \tag{14.19}$$

starten, wobei die g^{s} die Skalenfelder sind, dann folgt

$$H_\mu = H(g_i^{\mathrm{s}} \mathrm{e}^{y_i l}) + \sum_i \lambda_i \mathrm{e}^{-x_h l} S(\mathbf{r}_i) = H\left(g_i^{\mathrm{s}} \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{y_i}\right) + \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{-x_h} \sum_i \lambda_i S(\mathbf{r}_i), \tag{14.20}$$

woraus dann für die Korrelationen

$$\langle S(b\mathbf{r}_1)...S(b\mathbf{r}_N)\rangle'_\mu = b^{-Nx_h} \langle S(\mathbf{r}_1)...S(\mathbf{r}_N)\rangle_\mu \tag{14.21}$$

folgt und damit

$$G_\Lambda^{(N)}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_N) = \langle S(\mathbf{r}_1)...S(\mathbf{r}_N)\rangle_\Lambda = b^{N(x-x_h)} \langle S(\mathbf{r}_1)...S(\mathbf{r}_N)\rangle_\mu = b^{N(x-x_h)} G_\mu^{(N)}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_N). \tag{14.22}$$

Wir erhalten also einen Zusammenhang zwischen der Korrelation bei Abschneide-Impuls Λ und einem endlichen Impuls μ. Die Darstellung ist sehr vereinfacht und bedarf einer Anzahl von Präzisierungen, die wir im Folgenden geben werden.

Zunächst aber verlangen wir, dass unser $G_\Lambda^{(N)}$ die Normierungsbedingungen erfüllt. Wir wählen dazu die a_i in Abhängigkeit von Λ so, dass $G_\Lambda^{(N)}$ mit $G_\mu^{(N)}$ übereinstimmt, das heißt $b^x = b^{x_h}$, wobei $x_h = (d-2+\eta)/2$. Da wir η nicht a priori kennen, setzen wir

$$b^x = b^{(d-2)/2} Z^{-1/2}, \tag{14.23}$$

wobei man Z als den Renormierungs-Faktor der Wellenfunktion bezeichnet. Falls wir etwa

$$a_0 = Z, \quad a_1 = Z\Lambda^2 a_1', \quad a_2 = Z^2 \Lambda^{4-d} g_0 \tag{14.24}$$

setzen, so folgt

$$H_\Lambda = \int_{(\Lambda)} \mathrm{d}^d x \left(\frac{Z}{2}(\nabla S)^2 + \frac{Z\Lambda^2 a_1'}{2} S^2 + \frac{Z^2 \Lambda^{4-d} g_0}{24} S^4\right) \tag{14.25}$$

und

$$H_\mu' = \int_{(\mu)} \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2}(\nabla S)^2 + \frac{\mu^2 a_1'}{2} S^2 + \frac{\mu^{4-d} g_0}{24} S^4\right) \tag{14.26}$$

(Bei dieser Betrachtung haben wir die Quellterme $\lambda S(\mathbf{r})$ in linearer Näherung betrachtet. Hierzu müssen die ursprünglichen Terme mindestens $1/\Lambda$ von einander entfernt sein. Während der Wilson-Renormierung rücken sie einander näher, so dass schließlich $|\Delta \mathbf{r}| \gg 1/\mu$ gelten muss. Andernfalls werden nicht-lineare Beiträge wichtig. Dies impliziert umgekehrt, dass man für $|\mathbf{k}| \gg \mu$ Abweichungen erhält.)

Abgesehen von diesen nichtlinearen Beiträgen wären die Überlegungen exakt, wenn alle Skalenfelder verschwinden würden. Eine Kopplung a_i, in der Regel a_0 legt eine Skala für die S fest. Weiter können wir die Kopplungen a_1 und a_2 verwenden, um das Skalenfeld $\tau = 0$ für die Temperatur festzulegen, so dass wir tatsächlich am kritischen Punkt sind. Schließlich ist es zweckmäßig auch noch das Skalenfeld für die Vierer-Kopplung gleich 0 zu setzen, das bei $d = 4$ marginal ist. Die anderen können wir nicht gleich 0 setzen. Bei $d = 4$ sind die zugehörigen Exponenten y aber gleich -2 oder kleiner, da man typischerweise Terme $\nabla^{2k} S^{2n}$ mit $y = d-2k-2n \le -2$ hat. Daher treten Abweichungen von Ordnung Λ^{-2} auf, die wegzulassen sind.

Wir hatten oben angenommen, dass sich die Quellterme für die Spins mit $(\Lambda/\mu)^{-x_h} = b^{(2-d)/2}(\Lambda/\mu)^{-\eta/2}$ umskalen. Das gilt, wenn g_0 einen Fixpunktwert angenommen hat. Daraus folgt

$$\eta(g_0^*) = -\frac{\mathrm{d}\ln Z}{\mathrm{d}\ln \Lambda}|_{g,\mu}. \tag{14.27}$$

Normalerweise aber verändert sich g_0 in Abhängigkeit von Λ unter der Renormierung, so dass

$$Z = b^{-2x_h+d-2} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}l \eta(l)} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}(\ln \Lambda)\eta(g_0(\Lambda))} \tag{14.28}$$

zu schreiben ist, woraus

$$\eta(g_0) = -\frac{\mathrm{d}\ln Z}{\mathrm{d}\ln\Lambda}|_{g,\mu} \tag{14.29}$$

folgt. Weiter ergibt die Beziehung zwischen g, g_0 und Λ die Veränderung von g_0 mit Λ

$$W(g_0, \epsilon, \frac{\Lambda}{\mu}) = \frac{\partial g_0}{\partial \ln\Lambda}|_{g,\mu} \tag{14.30}$$

Wir haben hier W statt β geschrieben (wie auch Brezin et al). Die oben angegebene Funktion $G_\mu^{(N)}$ wird auch als renormierte Funktion $G_R^{(N)}$bezeichnet, während $G_\Lambda^{(N)}$, wenn man in obiger Funktion $Z = 1$ setzt als nackte (engl. bare) Funktion $G_\mathrm{b}^{(N)}$ bezeichnet wird. Offensichtlich gilt dann

$$G_\mathrm{b}^{(N)} = Z^{N/2} G_\mathrm{R}^{(N)}, \quad \Gamma_\mathrm{b}^{(N)} = Z^{-N/2}\Gamma_\mathrm{R}^{(N)}. \tag{14.31}$$

Da der renormierte Vertex $\Gamma_\mathrm{R}^{(N)}$ von Λ unabhängig ist, gilt die Renormierungs-Gleichung

$$\left.\frac{\partial\Gamma_\mathrm{R}^{(N)}}{\partial\ln\Lambda}\right|_{g,\mu} = 0 = \left(\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda} + W(g_0,\epsilon)\frac{\partial}{\partial g_0} - \frac{N}{2}\eta(g_0,\epsilon)\right)\Gamma_\mathrm{b}^{(N)}. \tag{14.32}$$

Wir bemerken noch, dass die renormierten Korrelationen nicht von μ und daher auch nicht Λ/μ abhängen.

Der nackte Vertex ist unabhängig vom Normierungs-Impuls μ, das heißt

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{b}^{(N)}}{\mathrm{d}\ln\mu}|_{g_0,\Lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\left(Z^{-N/2}\Gamma_\mathrm{R}^{(N)}\right) = 0. \tag{14.33}$$

Das ergibt eine andere Renormierungs-Gleichung

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \tilde{W}(g)\frac{\partial}{\partial g} - \frac{N}{2}\tilde{\eta}(g)\right)\Gamma_\mathrm{R}^{(N)}(p_i; g, \mu) = 0 \tag{14.34}$$

mit

$$\tilde{W}(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}|_{g_0,\Lambda}, \quad \tilde{\eta}(g) = \mu\frac{\partial\ln Z}{\partial\mu}|_{g_0,\Lambda}. \tag{14.35}$$

Die Funktionen W und $\tilde{W}$ wie auch η und $\tilde{\eta}$ unterscheiden sich, stimmen aber an den Fixpunkten überein. Auch können diese Funktionen wie auch g^* von der Wahl der Regularisierung abhängen, nicht aber die kritischen Exponenten.

14.c Auswertung d-dimensionaler Integrale

14.c Evaluation of d-dimensional integrals

Zur Auswerung d-dimensionaler Integrale für nicht ganzes d verwendet man für den Propagator die Feynman-Darstellung

$$\frac{1}{m^2+p^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha \exp(-\alpha(m^2+p^2)) \tag{14.36}$$

Dann kann man das Integral bezüglich seiner Impulsabhängigkeit in seine Komponenten faktorisieren, die Gauss-Integrale über die einzelnen Komponenten durchführen. Da man d Komponenten hat, ist die d-te Potenz dieser Komponente zu nehmen und es bleibt ein Integral über die αs. Wir betrachten

$$\begin{aligned} I(m_1, m_2, p) &= \int_k \frac{1}{(m_1^2+k^2)(m_2^2+(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2)} \\ &= \int_k \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_1 \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_2 \exp(-\alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2) \prod_{\mu=1}^d \exp(-\alpha_1 k_\mu^2 - \alpha_2(k_\mu+p_\mu)^2). \end{aligned} \tag{14.37}$$

Vertauschen wir nun die Integrationen, so ergibt die Integration über k_μ

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k_\mu \exp(-\alpha_1 k_\mu^2 - \alpha_2(k_\mu+p_\mu)^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha_1+\alpha_2)}}\exp\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p_\mu^2\right), \tag{14.38}$$

so dass schließlich

$$I(m_1,m_2,p) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d}\int \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{d/2}}\exp(-\alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2) \tag{14.39}$$

bleibt. Die Dimension d tritt jetzt nur noch als Parameter auf. Ein nächster Schritt zur Auswertung ist die Substitution

$$\alpha_1 = st, \quad \alpha_2 = s(1-t). \tag{14.40}$$

Damit folgt

$$I(m_1,m_2,p) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d}\int_0^\infty \mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}t s^{1-d/2}\exp(-s(tm_1^2 + (1-t)m_2^2 - t(1-t)p^2)). \tag{14.41}$$

Dann kann die s-Integration ausgeführt werden,

$$I(m_1,m_2,p) = \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(2\sqrt{\pi})^d}\int_0^1 \mathrm{d}t \left(tm_1^2 + (1-t)m_2^2 + t(1-t)p^2\right)^{d/2-2} \tag{14.42}$$

Speziell erhält man

$$\begin{aligned}
I(m_1,m_2,0) &= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(2\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{\frac{d}{2}-1}\frac{m_1^{d-2}-m_2^{d-2}}{m_1^2-m_2^2}, && (14.43)\\
I(0,0,p) &= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma^2(\frac{d}{2}-1)}{(2\sqrt{\pi})^d\Gamma(d-2)}(p^2)^{d/2-2}, && (14.44)\\
I(\Lambda,0,p) &= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(2\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{\frac{d}{2}-1}(\Lambda^{d-4}+O(p^2\Lambda^{d-6})), && (14.45)\\
I(\Lambda,\Lambda,p) &= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(2\sqrt{\pi})^d}(\Lambda^{d-4}+O(p^2\Lambda^{d-6})). && (14.46)
\end{aligned}$$

Für $d \approx 4$ folgt dann mit

$$\Gamma(z) = 1/z + O(z^0), \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \tag{14.47}$$

unter Berücksichtigung von

$$I_\Lambda(m_1,m_2,p) = I(m_1,m_2,p) - I(\sqrt{\Lambda^2+m_1^2},m_2,p) - I(m_1,\sqrt{\lambda^2+m_2^2},p) + I(\sqrt{\Lambda^2+m_1^2},\sqrt{\lambda^2+m_2^2},p) \tag{14.48}$$

im masselosen Fall

$$I_\Lambda(0,0,p) = \frac{1}{8\pi^2}\frac{p^{d-4}-\Lambda^{d-4}}{4-d} \tag{14.49}$$

und im Limes $d = 4$

$$I_\Lambda(0,0,p) = \frac{1}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{p}\right). \tag{14.50}$$

Wir erwähnen kurz die dimensionelle Regularisierung, von der wir hier allerdings keinen Gebrauch machen werden. Bei dieser verzichtet man auf das Abschneiden (was ja mühsam ist) und berechnet das Integral in Abhängigkeit von d in dem Bereich, in dem es konvergiert, setzt dann analytisch fort und entwickelt um die kritische Dimension, also hier um $d = 4$, das heißt in ϵ bis zur notwendigen Ordnung. Für das hier betrachtete Integral heißt das, wir werten es für $d < 4$ aus (falls m_1 oder m_2 verschwindet, müssen wir noch $d > 2$ fordern) und setzen dann analytisch fort. Diese dimensionelle Regularisierung erleichtert die Rechnungen für mehrere Schleifen (loops) wesentlich.

14.d Kritische Theorie   14.d Critical Theory

Wir betrachten nun die kritische Theorie. Wir beginnen mit $\Gamma^{(2)}$. Wir erhalten in erster Ordnung in g_0

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m_0^2 - \frac{g_0}{2} \int_k G_{0\Lambda}(k). \tag{14.51}$$

Das Integral divergiert, ist aber unabhängig von p. Wir renormieren generell durch die Forderung

$$\Gamma^{(2)}(0) = 0 \tag{14.52}$$

und ziehen für endliches p stets $\Gamma^{(2)}(0)$ ab, erhalten also mit der Selbstenergie, die wir in (13.37) definiert haben,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - \Sigma(p) + \Sigma(0). \tag{14.53}$$

Dies hat die Konsequenz, dass wir in zweiter Ordnung in g_0

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - \frac{g_0^2}{6} \int_{p_1,p_2} G_{0\Lambda}(p_1) G_{0\Lambda}(p_2) (G_{0\Lambda}(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}|) - G_{0\Lambda}(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|)) \tag{14.54}$$

erhalten.

Für $\Gamma^{(4)}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_i) &= g_0 - \frac{g_0^2}{2}(I_\Lambda(p_1+p_2) + I_\Lambda(p_1+p_3) + I_\Lambda(p_1+p_4)), && (14.55)\\ I_\Lambda(p) &= \int_k G_{0\Lambda}(k) G_{0\Lambda}(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|) && (14.56) \end{aligned}$$

Wir erhalten damit in 1-Schleifen-Näherung (Schleife=loop)

$$\mu^\epsilon g = \Lambda^\epsilon g_0 - \frac{3}{2} (\Lambda^\epsilon g_0)^2 I_\Lambda^{\rm div} \tag{14.57}$$

mit dem divergierenden Anteil

$$I_\Lambda^{\rm div} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\Lambda^{-\epsilon}}{\epsilon}. \tag{14.58}$$

Dabei gilt generell, dass die Divergenz für $d \ge 4$, also $\epsilon \le 0$ auftritt. Damit folgt dann

$$\mu^\epsilon g = \Lambda^\epsilon g_0 \left(1 + \frac{3}{16\pi^2 \epsilon} g_0\right) \tag{14.59}$$

Wir berechnen nun $W(g_0, \epsilon)$ aus Gl. (14.30). Anwendung der Ableitung $\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda}$ bei festem g und μ ergibt

$$-\epsilon \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^\epsilon g = \Lambda \frac{{\rm d}g_0}{{\rm d}\Lambda} \left(1 + \frac{3}{8\pi^2} g_0\right), \tag{14.60}$$

woraus dann

$$W(g_0, \epsilon) = \Lambda \frac{{\rm d}g_0}{{\rm d}\Lambda} = \frac{-\epsilon\left(g_0 + \frac{3}{16\pi^2\epsilon} g_0^2\right)}{1 + \frac{3}{8\pi^2\epsilon} g_0} = -\epsilon g_0 + \frac{3}{16\pi^2} g_0^2 + O(g_0^3) \tag{14.61}$$

folgt. Wir finden also auch hier zwei Fixpunkte, bestimmt durch $W(g^*) = 0$,

$$g^*_{\rm triv} = 0, \quad g^*_{\rm n.triv} = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon. \tag{14.62}$$