D

Konventionelle Renormierung

Conventional Renormalization

13 Pfadintegrale für klassische Felder

13.a Pfadintegrale

13.a.α Gauss-Integrale

Wir wollen uns nun mit der Pfadintegral-Darstellung für ein klassisches System befassen. Das System werde durch ein reelles Feld $S(\mathbf{r})$ beschrieben. Wir betrachten also die Zustandssumme

13 Path Integrals for Classical Fields

13.a Path integrals

13.a.α Gaussian integrals

Now we consider the path-integral representation for a classical system. The system will be described by a real field $S(\mathbf{r})$. We consider the partition function

$$Z = \int [\mathrm{D}S] \exp(-H(S)). \tag{13.1}$$

Dabei bedeutet $[\mathrm{D}S]$, dass wir über S an allen Orten integrieren. Wie das im Einzelnen zu verstehen ist, stellen wir im Weiteren dar. Da wir an Erwartungswerten und Korrelationen interessiert sind, fügen wir einen Quellterm, das einem ortsabhängigen Magnetfeld $h(\mathbf{r})$ entspricht, hinzu

$[\mathrm{D}S]$ means, that we integrate over the S at all points. How this can be understood, will be presented in the following. We add a source term corresponding to a space-dependent magnetic field $h(\mathbf{r})$, since we are interested in expectation values and correlations,

$$Z(h) = \int [\mathrm{D}S] \exp(-H(S) + hS) \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \quad hS = \int \mathrm{d}^d r h(\mathbf{r}) S(\mathbf{r}). \tag{13.2}$$

Durch Differentiation nach h erhalten wir

Differentiating with respect to h yields

$$\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} Z(h) = Z(h)\langle S(\mathbf{r})\rangle \tag{13.3}$$

und entsprechend für höhere Ableitungen

and similarly for higher derivatives

$$\frac{\delta^n}{\delta h(\mathbf{r}_1)\delta h(\mathbf{r}_2)...\delta h(\mathbf{r}_n)} Z(h) = Z(h)\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)...S(\mathbf{r}_n)\rangle. \tag{13.4}$$

Wir wollen zu einer störungstheoretischen Beschreibung übergehen. Dazu betrachten wir zunächst das Gauss-Integral

Now we pass over to a perturbative description. For this purpose we consider the Gaussian integral

$$Z_0(h) = \int [\mathrm{D}S] \exp(-\frac{1}{2} SKS + hS) \quad \begin{matrix}\text{mit}\\ \text{with}\end{matrix} \quad SKS = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}' S(\mathbf{r}) K(\mathbf{r},\mathbf{r}') S(\mathbf{r}'). \tag{13.5}$$

Dabei verlangen wir, dass der Kern K symmetrisch und positiv ist. Wir führen nun das Inverse G_0 zu K ein,

We require that the kernel K is symmetric and positive. We introduce the inverse G_0 to K,

$$\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'')K(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{13.6}$$

Dann kann man das Integral (13.5) auswerten, indem man quadratisch ergänzt zu

then the integral (13.5) can be evaluated by completing the square to

$$Z_0(h) = \int [\mathrm{D}S] \exp\left(-\frac{1}{2}(S-G_0h)K(S-G_0h) + \frac{1}{2}hG_0h\right) = Z_0(0)\exp(\frac{1}{2}hG_0h). \tag{13.7}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung überzeuge man sich, dass für die Gauss-Verteilung

Using this equation one easily convinces one-self that for the Gaussian distribution

$$\begin{aligned}
\langle S(\mathbf{r})\rangle_0 &= \int \mathrm{d}^d r' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')h(\mathbf{r}'), &(13.8)\\
\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)\rangle_0 &= \langle S(\mathbf{r}_1)\rangle_0\langle S(\mathbf{r}_2)\rangle_0 + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), &(13.9)\\
\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)S(\mathbf{r}_2)\rangle_0 &= \langle S(\mathbf{r}_1)\rangle_0\langle S(\mathbf{r}_2)\rangle_0\langle S(\mathbf{r}_3)\rangle_0 + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\langle S(\mathbf{r}_3)\rangle_0\\
&\quad + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)\langle S(\mathbf{r}_2)\rangle_0 + G_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\langle S(\mathbf{r}_1)\rangle_0 &(13.10)
\end{aligned}$$

gilt. Dabei verwendet wir, dass für die Funktional-Ableitung gilt

holds. We use that for the functional derivatives one has

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\left(\frac{1}{2}hG_0h\right) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d r' \int \mathrm{d}^d r'' h(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')h(\mathbf{r}'')\right) &= \int \mathrm{d}^d r'' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'')h(\mathbf{r}''), &(13.11)\\
\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r}')}\left(\int \mathrm{d}^d r'' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'')h(\mathbf{r}'')\right) &= G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'). &(13.12)
\end{aligned}$$

Speziell für verschwindendes Feld h erhält man

One obtains especially for a vanishing field h

$$\begin{aligned}
\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)\rangle_0 &= G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), &(13.13)\\
\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)S(\mathbf{r}_3)S(\mathbf{r}_4)\rangle_0 &= G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_4) + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4)G_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3). &(13.14)
\end{aligned}$$

Hat man ein Produkt von $2n$ Faktoren S, so hat man die Orte $\mathbf{r}_i$ auf alle Arten zu Paaren zusammenzufügen und das Produkt der jeweiligen G_0 aufzusummieren. Es gibt dann insgesamt $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)...3\cdot 1$ Beiträge.

If one has a product of $2n$ factors S, then one has the to combine the positions $\mathbf{r}_i$ pairwise in all possible ways and to sum the products of the respective G_0s. This yields in total $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)...3\cdot 1$ contributions.

Wir haben das Feld durch die lokalen Amplituden $S(\mathbf{r})$ dargestellt. Man kann auch von einer anderen Basis ausgehen. Da K und die Wechselwirkung V, die wir unten einführen, in der Regel translationsinvariant sind, ist es häufig zweckmäßig, die Fouriertransformierte

We have represented the field by the local amplitudes $S(\mathbf{r})$. One may start from a different basis. Since K and the interaction V, which we will introduce below, are translational invariant in general, it is usually convenient to introduce its Fourier transform

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{r}) &= \frac{1}{V_{\mathrm{P}}}\sum_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{d}^d k S_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, &(13.15)\\
S_{\mathbf{k}} &= \int \mathrm{d}^d r S(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &(13.16)
\end{aligned}$$

einzuführen. Dann transformiert sich

. Then the transformation reads

$$SKS = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}' S(\mathbf{r})K(\mathbf{r},\mathbf{r}')S(\mathbf{r}') = \frac{1}{V_\mathrm{P}} \sum_{\mathbf{k}} K_\mathbf{k} S_\mathbf{k} S_{-\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d k K_\mathbf{k} S_\mathbf{k} S_{-\mathbf{k}} \tag{13.17}$$

mit

with

$$K_\mathbf{k} = \int \mathrm{d}^d r K(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{13.18}$$

Speziell für

In particular for

$$SKS = \int \mathrm{d}^d r (m^2 S^2(\mathbf{r}) + (\nabla S(\mathbf{r}))^2) \tag{13.19}$$

folgt

we obtain

$$K_\mathbf{k} = m^2 + k^2, \quad G_{0\mathbf{k}} = \frac{1}{m^2+k^2}, \quad G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\dot{(}\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{m^2+k^2}. \tag{13.20}$$

13.a.β Störungstheorie

Wir kommen nun zur Störungstheorie. Wir zerlegen $H(S)$ in einen in S bilinearen Anteil und die Wechselwirkung V, die wir störungstheoretisch behandeln

13.a.β Perturbation theory

We now start perturbation theory. We separate $H(S)$ into two pieces, one bilinear in S and the interaction V, which we treat in perturbation theory

$$H(S) = \frac{1}{2} SKS + V\{S(\mathbf{r})\}. \tag{13.21}$$

Beachten wir, dass

Observing that

$$\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \mathrm{e}^{hS} = S(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{hS}, \tag{13.22}$$

dann können wir das Funktional-Integral

we may express the functional integral

$$Z(h) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-H(S) + hS) \tag{13.23}$$

ausdrücken als

as

$$Z(h) = \exp\left(-V\left\{\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\right\}\right) . \int [\mathrm{D}S] \exp\left(-\frac{1}{2} SKS + hS\right) \tag{13.24}$$

und erhalten damit für die Zustandssumme

and obtain for the partition function

$$Z(h) = Z_0(0) \exp\left(-V\left\{\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\right\}\right) . \exp(\frac{1}{2} h G_0 h). \tag{13.25}$$

Für die Korrelationen können wir nach wie vor die Gleichung (13.4) verwenden und erhalten

We still may use equation (13.4) for the correlations and obtain

$$Z(0)\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)...S(\mathbf{r}_n)\rangle = Z_0(0) \frac{\delta^n}{\delta h(\mathbf{r}_1)\delta h(\mathbf{r}_2)...\delta h(\mathbf{r}_n)} \exp\left(-V\left\{\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\right\}\right) . \exp(\frac{1}{2} h G_0 h). \tag{13.26}$$

Die Ausdrücke (13.25) und (13.26) erlauben uns eine störungstheoretische Entwicklung nach Potenzen des Potentials V durchzuführen.

The expressions (13.25) and (13.26) allow us to perform a perturbative expansion in powers of the potential V.

13.a.γ Zustandssumme $Z_0(0)$

Wir haben $Z_0(0)$ noch nicht ausgewertet. Solange K nicht variiert wird, kürzt es sich bei Berechnung von Erwartungswerten heraus und trägt zur freien Energie nur einen konstanten Beitrag bei. In Abhängigkeit von K erhält man für den translationsinvarianten Fall aus dem mittleren Ausdruck von (13.17)

13.a.γ Partition function $Z_0(0)$

We have not yet evaluated $Z_0(0)$. As long as K is not varied, it will cancel in the calculation of expectation values and it contributes only a constant to the free energy. As function of K one obtains in the translational invariant case from the middle expression of (13.17)

$$Z_0(0) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln K_{\mathbf{k}}\right). \tag{13.27}$$

Dabei wurden die Faktoren V_{P} weggelassen, die zum Logarithmus der Zustandssumme eine additive Konstante liefern würden. Übertragen in die Ortsdarstellung findet man

Here the factors V_{P} have been omitted, which contribute to the logarithm of the partition function only an additive constant. Carried over to the representation in real space one obtains

$$Z_0(0) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln K\right). \tag{13.28}$$

Diese Spur des Logarithmus von K ist wie folgt zu interpretieren. Wir zerlegen

The trace of the logarithm of K is interpreted in the following way. We decompose

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{13.29}$$

Da $\delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ unter Faltung die Eins ist (Multiplikation mit einer Funktion von $\mathbf{r}'$ und Integration über $\mathbf{r}'$ reproduziert die Funktion) erhält man für das $\mathbf{r},\mathbf{r}'$-Element von $\ln K$ durch Entwicklung nach Potenzen von $\hat{K}$

Since $\delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ is the unit element under convolution (multiplication by a function of $\mathbf{r}'$ and integration over $\mathbf{r}'$ reproduces the function) one obtains for the $\mathbf{r},\mathbf{r}'$ element of $\ln K$ the expansion in powers of $\hat{K}$

$$(\ln K)(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d r'' \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\hat{K}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') + ... \tag{13.30}$$

und damit

and thus

$$\mathrm{tr}\ln K = \int \mathrm{d}^d r \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d r \mathrm{d}^d r' \hat{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{K}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + ... \tag{13.31}$$

Falls K im Allgemeinen nicht translationsinvariant ist, diagonalisiert man K und ersetzt in (13.27) $K_{\mathbf{k}}$ durch die Eigenwerte von K. (13.30) und (13.31) gelten allgemein.

If in general K is not translational invariant, then one diagonalizes K and replaces $K_{\mathbf{k}}$ in (13.27) by the eigenvalues of K. (13.30) and (13.31) hold generally.

13.b Störungstheorie und Diagramme

Man zeichne alle möglichen Diagramme, indem man zunächst Vertices für die Kopplungen $V_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_k)$ in

13.b Perturbation theory and diagrams

One draws all possible diagrams by first drawing vertices for the couplings $V_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_k)$ in

$$V(S) = \sum_k \frac{1}{k!}\int \mathrm{d}^d r_1 \mathrm{d}^d r_2 ... \mathrm{d}^d r_k V_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_k) S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)...S(\mathbf{r}_k) \tag{13.32}$$

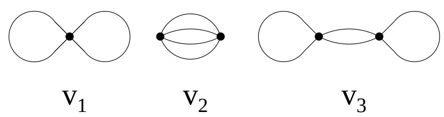
in vorgegebener Anzahl zeichnet. Dabei erhalten diese je k Beine, die mit Orten $\mathbf{r}$ versehen werden. Weiter zeichnet man Orte mit Beinen für die Faktoren $S(\mathbf{r})$, die in der Korrelation auftreten. Dann verbindet man die verschiedenen Beine die von den Faktoren S der Korrelationen und den S der Vertices herrühren, durch Linien, denen man die Propagatoren $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mit den jeweiligen Orten zuordnet. Die Propagatoren und die Kopplungen V_k sind miteinander zu multiplizieren und über die Orte der Vertices ist aufzuintegrieren. Dies ergibt einen diagrammatischen Beitrag (Feynman Diagramm).
Dieser ist allerdings noch mit einem kombinatorischen Faktor zu multiplizieren. Dazu stellen wir folgende Überlegung an. Wir nummerieren die Enden der Propagatoren der Reihe nach durch. Zunächst wählen wir einen ersten Punkt willkürlich, als zweiten das andere Ende dieses Propagators. Dann einen dritten Punkt nach Belieben, dann den vierten als anderes Ende des von drei ausgehenden Propagators, usw. Haben wir in unserem Diagramm n_k Faktoren V_k, so haben wir anfangs einen Faktor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$. Dabei stecken die Faktoren $1/k!$ bereits in der Definition der Wechselwirkung. Der Faktor $1/n_k!$ rührt von der Entwicklung der Exponentialfunktion $\exp(-V_k)$ her. Wir fragen nun, wieviele Möglichkeiten gibt es, dieses Diagramm herzustellen? Hängt der Punkt eins an einem V_k, so hat man die Wahl zwischen n_k solcher Vertices, dazu noch die Wahl aus k Linien, die von diesem Vertex weggehen; insgesamt also eine $n_k \cdot k$-fache Wahl. Beim Punkt zwei besteht, falls er am gleichen Vertex liegt, die Wahl zwischen $k-1$ äußeren Enden. Falls er an einem anderen Vertex V_k liegt, hat man eine $(n_k - 1)k$ fache Wahl. Liegt er an einem Vertex $V_{k'}$ mit $k' \neq k$, so bleibt der Faktor $n_{k'} k'$. Lediglich, wenn man an einen äußeren Punkt gelangt, hat man keine andere Wahl. Insgesamt stellt man fest, dass durch diese Faktoren der Anfangsfaktor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$ kompensiert wird. Allerdings kann es sein, dass mehrere dieser Wahlmöglichkeiten das gleiche Diagramm liefern. Dann hat man zuviel gezählt. Gibt es also insgesamt s verschiedene Abbildungen des Diagramms auf sich selbst, so ist es mit dem Faktor $1/s$ zu multiplizieren. So gilt schon, wenn ein Propagator von einem Vertex auf diesen zurückkehrt, dass allein dafür ein Faktor $1/2$ anzusetzen ist, da der Propagator in beide Richtungen laufen kann. Weiterhin ist noch das Vorzeichen $(-)^{\sum_k n_k}$ zu berücksichtigen.

in specified number. These obtain k legs, which are marked with the positions $\mathbf{r}$. Further one draws external legs for the factors $S(\mathbf{r})$, which appear in the correlations. Then the various legs, which appear in the factors S of the correlations and in the S of the vertices are connected pairwise by lines, which are associated with the propagators $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ of the corresponding points. The propagators and the couplings V_k have to be multiplied and integrated over the internal points of the internal vertices. This yields the diagrammatic contribution.

However, this contribution has to be multiplied by a combinatorial factor. We obtain it by the following consideration: Let us number the ends of the propagators consecutively. We choose the first point arbitrarily, as second point the other end of this propagator. Then we choose the third point arbitrarily, then the other end of the propagator starting from the third point, and so on. If our diagram has n_k factors V_k, then we have initially a factor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$. The factors $1/k!$ are already in the definition of the interaction. The factor $1/n_k!$ comes from the expansion of the exponential function $\exp(-V_k)$. We ask now: How many possibilities are there to construct this diagram? If point one is at one of the vertices V_k, then one has the choice of n_k of these vertices and additionally the choice of k lines leaving this vertex; in total an $n_k \cdot k$ fold choice. At point number two there is a choice of $k-1$ external ends, if it is located at the same vertex. If it is located at a different vertex V_k then one has a $(n_k - 1)k$ fold choice. If it is connected to a vertex $V_{k'}$ with $k' \neq k$, then the factor is $n_{k'} k'$. Only, if one reaches an external point, then one has no other choice. In total one finds, that these factors compensate the initial factor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$. It may happen, however, that several of these choices yield the same diagram. Then one has overcounted. Thus, if there are s different mappings of the diagram onto itself, then it has to be multiplied by the factor $1/s$. Thus if a propagator returns from a vertex to the same vertex, then this already yields a factor $1/2$, since this propagator can pass through in both directions. Furthermore the sign $(-)^{\sum_k n_k}$ has to be taken into account.

Man bezeichnet die Diagramme, die zur Zustandssumme beitragen, als Vakuum-Diagramme. Sie haben keine äußeren Enden.

One calls the diagrams contributing to the partition function vacuum diagrams. They do not have external points.



In dieser Figur zeigen wir zunächst die Diagramme für die Zustandssumme bis zur zweiten Ordnung in V_4,

In this figure we show the diagrams of the partition sum up to second order in V_4,

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 - \frac{1}{8}v_1 + \frac{1}{48}v_2 + \frac{1}{16}v_3 + \frac{1}{128}v_1^2 + ... \tag{13.33}$$

Der Faktor $1/8$ bei v_1 kommt zum Beispiel dadurch zustande, dass man in jedem der beiden Propagatoren die beiden Enden austauschen kann, ohne dass sich dadurch das Diagramm verändert. Schließlich kann man auch die beiden Propagatoren miteinander vertauschen und das Diagramm geht in sich über. Daher drei Faktoren $1/2$. Eine andere Betrachtung ist die, dass man zur Berechnung dieses Diagramms den Erwartungswert eines Produktes von vier Faktoren ϕ an dem Vertex $V_1/24$ zu berechnen hat. Das Ergebnis ist die Summe der drei Beiträge in (13.14). Daher erhält man den Faktor $3/4! = 1/8$.

The factor $1/8$ of v_1 for example is obtained in the following way: One can exchange the ends of the two propagators without altering the diagram. Finally one can exchange the two propagators and the diagram maps into itself. Thus we have three factors $1/2$. Another consideration is that one has to calculate the product of four factors ϕ at the vertex $V_1/24$. The result are the three contributions in (13.14). Thus one obtains the factor $3/4! = 1/8$.

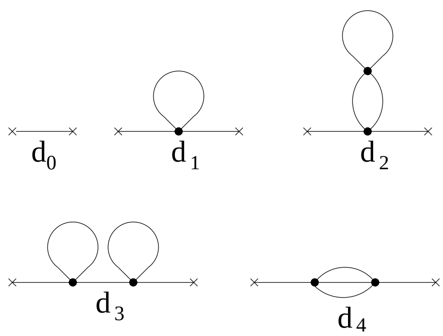
Wir bilden nun den Logarithmus von Z,

Now we calculate the logarithm of Z,

$$-\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T} = \ln Z = \ln Z_0 - \frac{1}{8}v_1 + \frac{1}{48}v_2 + \frac{1}{16}v_3 + ... \tag{13.34}$$

Hat ein zusammenhängendes Diagramm v_i einen Symmetriefaktor $1/s_i$, so gilt für ein Produkt $\prod_i v_i^{n_i}$ der Symmetriefaktor $\prod_i(1/n_i!s_i^{n_i})$, da man die n_i Diagramme in $n_i!$ Permutationen herstellen kann. Daher gilt für die freie Energie, dass man sie als Summe aller in sich geschlossenen zusammenhängenden Diagramme plus der freien Energie des wechselwirkungsfreien Systems erhält (Zusammenhängendes Cluster-Theorem).

If a connected diagram v_i has the symmetry factor $1/s_i$, then the product $\prod_i v_i^{n_i}$ has the symmetrie factor $\prod_i(1/n_i!s_i^{n_i})$, since the n_i diagrams can be constructed in $n_i!$ permutations. Thus the free energy is obtained as the sum of all closed connected diagrams plus the free energy of the interaction free system (linked cluster theorem).



13.b.α Zweipunkt-Korrelationen

Bei der Berechnung der Korrelationen erhält man nach (13.26) zunächst $Z(0)$ multipliziert mit der Korrelation. Man bemerkt, dass sowohl Diagramme auftreten, bei denen alle Teile über Propagatoren mit äußeren Enden zusammenhängen, wie auch solche, die Vakuum-Beiträge enthalten. Bezeichnen wir die Diagramme ohne Vakuum-Diagramme mit d_i, so sieht man, dass sich $Z(0)\langle\prod_i S(\mathbf{r}_i)\rangle = Z_0\sum_i(\pm d_i/s_i)\times$ Vakuum-Diagramme schreiben lässt, so dass man

13.b.α Two-point correlations

In calculating the correlations one obtains according to (13.26) initially $Z(0)$ multiplied by the correlation. One observes, that diagrams appear, where all parts are connected by propagators with the external links, as well as those which contain vacuum contributions. If we denote the diagrams without vacuum contributions by d_i, then one observes that one can write $Z(0)\langle\prod_i \phi(\mathbf{r}_i)\rangle = Z_0\sum_i(\pm d_i/s_i)\times$ vacuum diagrams, so that one obtains

$$\langle\prod_i S(\mathbf{r}_i)\rangle = \sum_i(\pm d_i/s_i) \tag{13.35}$$

erhält. Die Korrelationen ergeben sich als Summe der zusammenhängenden Diagramme. Im konkreten Fall der Zweipunkt-Korrelation folgt

. The correlations can be written as sum of the diagrams connected to the external points. In the case of the two-point correlation one obtains

$$\langle S(\mathbf{r})S(\mathbf{r}')\rangle = d_0 - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} + \frac{d_3}{4} + \frac{d_4}{6} + ... \tag{13.36}$$

Beachte, dass man die beiden Enden $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ nicht miteinander vertauschen kann. Für $d_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ hat man $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ und nicht $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')/2$.

Note, that the two ends $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ cannot be exchanged. For $d_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ one has $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ and not $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')/2$.

13.b.β Dyson-Gleichung

Betrachten wir die Diagramme d_i zur Zweipunkt-Funktion, so sehen wir, dass sich in d_3 die Schleife aus d_1 wiederholt. Allgemein haben die Beiträge zur Zweipunkt-Funktion eine Anzahl von Propagatoren, bei deren durchschneiden das Diagramm in zwei Teile zerfällt. Zwischen diesen Propagatoren sind jeweils Beiträge, die man als Selbstenergie Σ bezeichnet und die durch Durchschneiden einer Linie nicht zerfallen. Man nennt sie einteilchen-irreduzibel. Ausgedrückt durch Σ erhält man

13.b.β Dyson equation

Considering the diagrams d_i of the two-point function, we realize, that the loop of d_1 appears twice in d_3. Generally the contributions of the two-point function contain a number of propagators, which by cutting dissect the diagram into two parts. Between these propagators are contributions, which are called self-energy Σ and which cannot be decayed by cutting one line. They are therefore called one-particle irreducible. In terms of Σ one obtains

$$G = G_0 + G_0\Sigma G_0 + G_0\Sigma G_0\Sigma G_0 + ... = G_0 + G_0\Sigma G \quad \leftrightarrow \quad G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \tag{13.37}$$

Die Multiplikation ist als Multiplikation in $\mathbf{k}$-Raum oder als Faltung im Orts-Raum gemeint

The multiplication is multiplication in $\mathbf{k}$-space or meant as convolution in local space

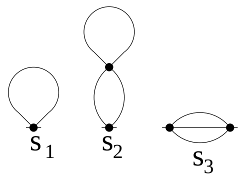
$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \int \mathrm{d}^d r'\mathrm{d}^d r'' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Sigma(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{13.38}$$

$$G_{\mathbf{k}} = G_{0,\mathbf{k}} + G_{0,\mathbf{k}}\Sigma_{\mathbf{k}}G_{\mathbf{k}}. \tag{13.39}$$

Diese Beziehung ist die Dyson-Gleichung. Die Beiträge erster und zweiter Ordnung zu Σ finden sich in der nächsten Figur.

This relation is the Dyson equation. The contributions in first and second order to Σ are shown in the next figure.

$$\Sigma = -\frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_3}{6} + ... \tag{13.40}$$



13.b.γ Vierer-Korrelation

Wir betrachten noch die Vierer-Korrelation $\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)S(\mathbf{r}_3)S(\mathbf{r}_4)\rangle$. Wir beobachten dass wir alle Beiträge aus GG erhalten und zusätzlich noch Beiträge $G_c^{(4)}$, bei denen alle vier Orte $\mathbf{r}_1$, ... $\mathbf{r}_4$ diagrammatisch verbunden sind,

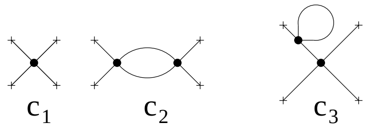
13.b.γ Four-Correlation

We consider the four-correlation $\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)S(\mathbf{r}_3)S(\mathbf{r}_4)\rangle$. We observe, that we obtain all contributions from GG and additionally a contribution $G_c^{(4)}$, in which all four points $\mathbf{r}_1$, ... $\mathbf{r}_4$ are diagramatically connected,

$$\langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2)S(\mathbf{r}_3)S(\mathbf{r}_4)\rangle = G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)G(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4)+G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_4)+G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4)G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)+C(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4). \tag{13.41}$$

Die Beiträge zu $G_c^{(4)}$ bis zur zweiten Ordnung sind in der nächsten Figur gezeigt. Dabei treten allerdings die Beiträge c_2 in drei Varianten auf, da es drei Möglichkeiten gibt, die äußeren Orten $\mathbf{r}_1$ ... $\mathbf{r}_4$ zu Paaren zusammenzufügen. Die Beiträge c_3 treten in vier Varianten auf, da der Selbstenergiebeitrag s_1 in jeder der äußeren Linie eingefügt werden kann.

The contributions to $G_c^{(4)}$ up to second order are shown in the next figure. The contributions c_2 appear in three variations, since there are three possibilities to connect the external points $\mathbf{r}_1$ ... $\mathbf{r}_4$ in pairs. The contributions c_3 appear in four variations, since the self-energy contribution s_1 can be inserted in each external line.



Man erhält damit

Thus one obtains

$$G_c^{(4)} = -c_1 + \frac{c_2 + 2\text{Perm.}}{2} + \frac{c_3 + 3\text{Perm.}}{2} + ... \tag{13.42}$$

Man kann aus $G_c^{(4)}$ die vier äußeren Beine herausziehen und erhält

One can amputate the external legs out of $G_c^{(4)}$ and obtains

$$G_c^{(4)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) = -\int \mathrm{d}^d r_1' \mathrm{d}^d r_2' \mathrm{d}^d r_3' \mathrm{d}^d r_4' G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1')G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2')G(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3')G(\mathbf{r}_4,\mathbf{r}_4')\Gamma^{(4)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_4'). \tag{13.43}$$

$\Gamma^{(4)}$ enthält dann bis in zweiter Ordnung in V_4 nur die Beiträge aus c_1 und c_2, nicht aber aus c_3, aus denen man die äußeren Propagatoren entfernt hat.

$\Gamma^{(4)}$ contains up to second order in V_4 only contributions from c_1 and c_2, but not from c_3, from which the external propagators have been removed.

13.c Erzeugende Funktionen

Wir bringen nun die obigen Beobachtungen in eine systematische Form.

13.c Generating Functions

We bring now the considerations above into a systematic form.

13.c.α Erzeugende Funktion der zusammenhängenden Diagramme

Wir erhielten die Korrelationen durch Funktionalableitung der Zustandssumme nach h. Daher ist die Zustandssumme die erzeugende Funktion der Korrelationen (N-Punkt-Funktionen)

13.c.α Generating function of the connected diagrams

We obtained the correlations by calculating the functional derivatives of the partition function with respect to h. Thus the partition function is the generating function of the correlations (N-point functions)

$$\frac{Z(h)}{Z(0)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \mathrm{d}^d r_1 ... \mathrm{d}^d r_N h(\mathbf{r}_1)...h(\mathbf{r}_N) G^{(N)}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_N), \quad (13.44)$$

$$G^{(N)}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_N) = \langle S(\mathbf{r}_1)...S(\mathbf{r}_N)\rangle. \quad (13.45)$$

Diese Korrelationen enthalten diagrammatisch Anteile, die zerfallen. Die zusammenhängenden Anteile G_c erhält man aus dem Logarithmus der Zustandssumme

These correlations contain diagrammatic contributions which decay. The connected contributions G_c are obtained from the logarithm of the partition function

$$W(h) = \ln Z(h) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \mathrm{d}^d r_1 ... \mathrm{d}^d r_N h(\mathbf{r}_1)...h(\mathbf{r}_N) G_\mathrm{c}^{(N)}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_N), \quad (13.46)$$

$$G_\mathrm{c}^{(0)} = \ln Z(0), \quad (13.47)$$

$$G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}) = G^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (13.48)$$

Man sieht dies, indem man (13.46) in

This can be seen by insering (13.46) in

$$\frac{Z(h)}{Z(0)} = \exp(W(h) - W(0)) \quad (13.49)$$

einsetzt. Der Entwicklungskoeffizient von $h(\mathbf{r}_1)...h(\mathbf{r}_N)$ enthält dann eine Summe von Produkten G_c mit den Argumenten der N Orte $\mathbf{r}_1$, ... $\mathbf{r}_N$ in allen Partitionen und zwar mit dem Faktor 1, da der Faktor $1/N!$ in der Entwicklung sich gegen die Anzahl der möglichen Permutationen weghebt. Man erhält also

. Then the expansion coefficient of $h(\mathbf{r}_1)...h(\mathbf{r}_N)$ contains a sum of products G_c with the arguments of the N points $\mathbf{r}_1$, ... $\mathbf{r}_N$ in all partitions and actually with the factor 1, since the factor $1/N!$ in the expansion cancels against the number of possible permutations. Thus one obtains

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_1) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_2), \quad (13.50)$$

$$\begin{aligned} G^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= G_\mathrm{c}^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_3) + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_1) + G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_1) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_2) G_\mathrm{c}^{(1)}(\mathbf{r}_3) \end{aligned} \quad (13.51)$$

und umgekehrt

and reverse

$$G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G^{(1)}(\mathbf{r}_1) G^{(1)}(\mathbf{r}_2), \quad (13.52)$$

$$\begin{aligned} G_\mathrm{c}^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= G^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) - G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^{(1)}(\mathbf{r}_3) - G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) G^{(1)}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad - G^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G^{(1)}(\mathbf{r}_1) + 2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1) G^{(1)}(\mathbf{r}_2) G^{(1)}(\mathbf{r}_3). \end{aligned} \quad (13.53)$$

Falls nur die $G^{(N)}$ mit geraden N von Null verschieden sind, dann gilt

If only the $G^{(N)}$ with even N are different from zero, then one obtains

$$\begin{aligned} G^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= G_\mathrm{c}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \\ &\quad + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_\mathrm{c}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4), \end{aligned} \quad (13.54)$$

$$\begin{aligned} G_\mathrm{c}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= G^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^{(2)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \\ &\quad - G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) G^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) - G^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4). \end{aligned} \quad (13.55)$$

13.c.β Einteilchen-irreduzible Vertizes

Es wird im weiteren nützlich sein, die N-Punkt Vertex-Funktionen zu betrachten, wenn man nur die einteilchen-irreduziblen Diagramme betrachtet, das heißt die Diagramme, die nicht durch Schneiden einer inneren Linie zerfallen. Diese kann man algebraisch durch eine Legendre-Transformation erhalten. Wir gehen aus von der Magnetisierung

13.c.β One-particle irreducible vertices

In the following it will be useful to consider the N-point vertex functions by considering only the one-particle irreducible diagrams, that is the diagrams which do not decay by cutting one internal line. These can be obtained algebraically by means of a Legendre transformation. We start out from the magnetization

$$M(\mathbf{r}) = \frac{\delta W(h)}{\delta h(\mathbf{r})} = \langle S(\mathbf{r})\rangle \tag{13.56}$$

und führen eine Legendre-Transformation durch,

and perform the Legendre transformation

$$\Gamma(M) = W(h) - \int \mathrm{d}^d r h(\mathbf{r}) M(\mathbf{r}). \tag{13.57}$$

Dann gilt

Then we have

$$\frac{\delta\Gamma(M)}{\delta M(\mathbf{r})} = h(\mathbf{r}). \tag{13.58}$$

Wir bemerken, dass

We note that

$$\frac{\delta^2 W(h)}{\delta h(\mathbf{r})\delta h(\mathbf{r}')} = \frac{\delta M(\mathbf{r})}{\delta h(\mathbf{r}')}, \quad \frac{\delta^2\Gamma(M)}{\delta M(\mathbf{r})\delta M(\mathbf{r}')} = \frac{\delta h(\mathbf{r})}{\delta M(\mathbf{r}')}. \tag{13.59}$$

Daher sind diese beiden Kerne invers zueinander

Thus these two kernels are inverse to each other

$$\int \mathrm{d}^d r'' \frac{\delta^2 W(h)}{\delta h(\mathbf{r})\delta h(\mathbf{r}'')} \frac{\delta^2\Gamma(M)}{\delta M(\mathbf{r}'')\delta M(\mathbf{r}')} = \delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{13.60}$$

Γ lässt sich nach Potenzen von M oder auch nach Potenzen von $M - G^{(1)}$ entwickeln,

Γ can be expanded in powers of M or also in powers of $M - G^{(1)}$,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \sum_{N\neq 1} \frac{1}{N!}\int \mathrm{d}^d r_1 \ldots \mathrm{d}^d r_N \tilde{\Gamma}^{(N)}(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N)(M(\mathbf{r}_1) - G^{(1)}(\mathbf{r}_1)) \ldots (M(\mathbf{r}_N) - G^{(1)}(\mathbf{r}_N)) \\ &= \sum_{N\neq 1} \frac{1}{N!}\int \mathrm{d}^d r_1 \ldots \mathrm{d}^d r_N \Gamma^{(N)}(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N) M(\mathbf{r}_1) \ldots M(\mathbf{r}_N). \end{aligned} \tag{13.61}$$

Wir führen nun die Transformation explizit durch, lassen aber alle Orte weg. Dann haben wir

Now we perform the transformation explicitely, however leave the locations aside. Then we have

$$W = G_{\mathrm{c}}^{(0)} + G^{(1)}h + \frac{1}{2}G_{\mathrm{c}}^{(2)}h^2 + \frac{1}{6}G_{\mathrm{c}}^{(3)}h^3 + \frac{1}{24}G_{\mathrm{c}}^{(4)}h^4 + O(h^5) \tag{13.62}$$

und erhalten für M

and obtain for M

$$M = G^{(1)} + G_{\mathrm{c}}^{(2)}h + \frac{1}{2}G_{\mathrm{c}}^{(3)}h^2 + \frac{1}{6}G_{\mathrm{c}}^{(4)}h^3 + O(h^4). \tag{13.63}$$

Diese Gleichung lösen wir nach h auf

We solve this equation for M

$$h = (G_{\mathrm{c}}^{(2)})^{-1}(M - G^{(1)} - \frac{1}{2}G_{\mathrm{c}}^{(3)}h^2 - \frac{1}{6}G_{\mathrm{c}}^{(4)}h^3 + O(h^4)). \tag{13.64}$$

Diese kann nun iteriert werden und man erhält h als Potenzreihe in $x = M - G^{(1)}$ unter Verwendung der Abkürzung $y = (G_c^{(2)})^{-1}$

This may now be iterated and one obtains h as series in powers of $x = M - G^{(1)}$ by using the abbreviation $y = (G_c^{(2)})^{-1}$

$$h = yx - \frac{1}{2}G_c^{(3)}y^3x^2 + \frac{1}{2}(G_c^{(3)})^2y^5x^3 - \frac{1}{6}G_c^{(4)}y^4x^3 + O(x^4). \tag{13.65}$$

Damit folgt

This yields

$$\Gamma = hM - W = hM - G_c^{(0)} - hG^{(1)} - \frac{1}{2}G_c^{(2)}h^2 - \frac{1}{6}G_c^{(3)}h^3 - \frac{1}{24}G_c^{(4)}h^4 + O(h^5). \tag{13.66}$$

Setzen wir das oben bestimmte h ein, so folgt

If we insert h determined above, then we obtain

$$\Gamma = -G_c^{(0)} + \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{6}G_c^{(3)}y^3x^3 - \frac{1}{24}(G_c^{(4)} - 3(G_c^{(3)})^2y)y^4x^4 + O(x^5). \tag{13.67}$$

Damit folgt

which yields

$$\begin{aligned}
\tilde\Gamma^{(0)} &= -G_c^{(0)} = -W(h=0) = -\ln Z(h=0), && (13.68)\\
\tilde\Gamma^{(1)} &= 0, && (13.69)\\
\tilde\Gamma^{(2)} &= (G_c^{(2)})^{-1}, && (13.70)\\
\tilde\Gamma^{(3)} &= -(G_c^{(2)})^{-3}G_c^{(3)}, && (13.71)\\
\tilde\Gamma^{(4)} &= -(G_c^{(2)})^{-4}G_c^{(4)} + 3(G_c^{(2)})^{-5}(G_c^{(3)})^2. && (13.72)
\end{aligned}$$

Explizit erhält man für $G_c^{(3)}$ und $G_c^{(4)}$

Explicetely one obtains for $G_c^{(3)}$ and $G_c^{(4)}$

$$\begin{aligned}
G_c^{(3)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) &= -\int \mathrm{d}^d r_1' \mathrm{d}^d r_2' \mathrm{d}^d r_3' G_c^{(2)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1')G_c^{(2)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2')G_c^{(2)}(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3')\tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_3'), && (13.73)\\
G_c^{(4)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) &= \int \mathrm{d}^d r_1' \mathrm{d}^d r_2' \mathrm{d}^d r_3' \mathrm{d}^d r_4' G_c^{(2)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1')G_c^{(2)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2')G_c^{(2)}(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3')G_c^{(2)}(\mathbf{r}_4,\mathbf{r}_4')\\
&\times \Big(- \tilde\Gamma^{(4)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_4')\\
&\quad + \int \mathrm{d}^d r_5 \mathrm{d}^d r_5' (\tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_5)G_c^{(2)}(\mathbf{r}_5,\mathbf{r}_5')\tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_5',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_4')\\
&\quad + \tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_5)G_c^{(2)}(\mathbf{r}_5,\mathbf{r}_5')\tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_5',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_4')\\
&\quad + \tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_4',\mathbf{r}_5)G_c^{(2)}(\mathbf{r}_5,\mathbf{r}_5')\tilde\Gamma^{(3)}(\mathbf{r}_5',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_2'))\Big) && (13.74)
\end{aligned}$$

Falls $G^{(1)}$ verschwindet, dann sind $\tilde\Gamma^{(N)}$ und $\Gamma^{(N)}$ identisch. Sonst ist $\tilde\Gamma^{(N)}$ noch nicht einteilchen-irreduzibel. Wir verwenden dann

If $G^{(1)}$ vanishes, then $\tilde\Gamma^{(N)}$ and $\Gamma^{(N)}$ are identical. Otherwise the $\tilde\Gamma^{(N)}$ are not yet one-particle irreducible. Then we use

$$\Gamma = \sum_N \frac{1}{N!}\tilde\Gamma^{(N)}x^N = \sum_M \frac{1}{M!}\Gamma^{(M)}(x + G^{(1)})^M = \sum_{N,k}\frac{1}{N!k!}\Gamma^{(N+k)}x^N(G^{(1)})^k, \tag{13.75}$$

woraus

from which

$$\tilde\Gamma^{(N)} = \sum_k \frac{1}{k!}\Gamma^{(N+k)}(G^{(1)})^k \tag{13.76}$$

folgt. Ähnlich findet man auch

follows. Similarly one finds

$$\Gamma^{(N)} = \sum_k \frac{1}{k!}\tilde\Gamma^{(N+k)}(-G^{(1)})^k. \tag{13.77}$$

Die $\Gamma^{(N)}$ sind die einteilchen-irreduziblen Vertizes. Man kann $G^{(1)}$ dadurch entfernen, dass man $S(\mathbf{r})$ durch $S(\mathbf{r}) - G^{(1)}(\mathbf{r})$ ersetzt.

The $\Gamma^{(N)}$ are the one-particle irreducible vertices. One can remove $G^{(1)}$ by replacing $S(\mathbf{r})$ by $S(\mathbf{r}) - G^{(1)}(\mathbf{r})$.