12 Nicht-trivialer Fixpunkt

12 Nontrivial Fixed-Point

12.a Nichtlineare Beiträge

12.a Nontrivial contributions

Ausgehend von

Starting from

$$H = H^* + \sum_i \mu_i O_i \tag{12.1}$$

erhält man durch Anwendung des Generators $\mathcal{G}$ auf H

one obtains applying the generator $\mathcal{G}$ onto H

$$\mathcal{G}H = \sum_i y_i \mu_i O_i + \frac{1}{2}\sum_{ijk} a_{ijk}\mu_j\mu_k O_i. \tag{12.2}$$

Der nichtlineare Beitrag aus (11.2) ergibt

The nonlinear contribution from (11.2) yields

$$-\int_q h(q)\frac{\delta}{\delta S_{\mathbf{q}}}(\sum_j \mu_j O_j)\frac{\delta}{\delta S_{-\mathbf{q}}}(\sum_k \mu_k O_k) = \frac{1}{2}\sum_{ijk}\mu_j\mu_k O_i. \tag{12.3}$$

Man muss also entwickeln

Thus one has to expand

$$\sum_i a_{ijk} O_i = -2\int_q h(q)\frac{\delta O_j}{\delta S_{\mathbf{q}}}\frac{\delta O_k}{\delta S_{-\mathbf{q}}}. \tag{12.4}$$

12.b Epsilon-Entwicklung

12.b Epsilon expansion

Wir wollen nun den nichttrivialen Fixpunkt bestimmen. Hierzu entwickeln wir diesen um den trivialen Fixpunkt

Now we will determine the non-trivial fixed point. For this purpose we expand around the trivial fixed point

$$H^*_{\mathrm{nt}} = H^*_{\mathrm{tr}} + \sum_i \mu^*_i O_i. \tag{12.5}$$

Es muss dann

Then

$$\frac{\mathrm{d}H^*_{\mathrm{nt}}}{\mathrm{d}l} = \sum_i y^{\mathrm{tr}}_i \mu^*_i O_i + \frac{1}{2}\sum_{ijk} a_{ijk}\mu^*_j\mu^*_k O_i = 0 \tag{12.6}$$

gelten, wobei die O_i die Eigenoperatoren zum trivialen Fixpunkt sind. Es folgen also die Bestimmungsgleichungen

has to hold where the O_i are eigenoperators of the trivial fixed point. Thus we obtain the equations for the μ^*

$$y^{\mathrm{tr}}_i \mu^*_i + \frac{1}{2}\sum_{jk} a_{ijk}\mu^*_j\mu^*_k = 0 \tag{12.7}$$

für den nicht-trivialen Fixpunkt. Eine nicht-triviale Lösung bietet sich an, wenn ein y_i klein ist. Der Fall $y_{22} = 0$ des letzten Abschnitts bezieht sich auf einen redundanten Operator, den man stets durch eine Transformation der S wegtransformieren kann. Diesen betrachten wir im Moment nicht, kommen aber später darauf zurück (Abschnitt 12.e). Dagegen betrachten wir den Operator $O_u = O_{40}$. Für diesen fanden wir

of the non-trivial fixed point. A non-trivial fixed point can be found, when one of the y_i is small. The case $y_{22} = 0$ of the last section is related to a redundant operator, which can always be transformed away by a transformation of the S. Presently we will not consider this one, but we will return to it in section 12.e. However we consider the operator $O_u = O_{40}$. For this operator we found $y_u = 4 - d =: \epsilon$. One can find a solution

$y_u = 4-d =: \epsilon$. Man kann nun eine Lösung dieser Gleichungen finden, in denen μ_u^* von Ordnung ϵ und die anderen μ_i^* von Ordnung ϵ^2 sind. Wir finden dann

to these equations in which μ_u^* is of order ϵ and the other μ_i^*s are of order ϵ^2. Then we find

$$y_i^{\rm tr}\mu_i^* + \frac{1}{2}a_{iuu}\mu_u^{*2} = O(\epsilon^3) \tag{12.8}$$

mit der Lösung

with the solution

$$\begin{aligned} \mu_u^* &= \frac{-2\epsilon}{a_{uuu}} + O(\epsilon^2), & (12.9)\\ \mu_i^* &= \frac{-a_{iuu}}{2y_i^{\rm tr}}\mu_u^{*2} + O(\epsilon^3) = O(\epsilon^2), \quad y_i^{\rm tr}(d=4) \neq 0. & (12.10) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Abweichungen vom nicht-trivialen Fixpunkt und setzen

We consider now deviations from the non-trivial fixed point and put

$$H = H_{\rm tr}^* + \sum_i (\mu_i^* + \delta\mu_i)O_i. \tag{12.11}$$

Daraus folgt bis zur ersten Ordnung in $\delta\mu_i$

Thus we obtain in first order in $\delta\mu_i$

$$\frac{{\rm d}H}{{\rm d}\ell} = \sum_i y_i^{\rm tr}\delta\mu_i O_i + \sum_{ijk} a_{ijk}\mu_j^*\delta\mu_k O_i. \tag{12.12}$$

Damit folgt für den Koeffizienten bei O_i

Then one obtains for the coefficients for O_i

$$\frac{{\rm d}\delta\mu_i}{{\rm d}l} = y_i^{\rm tr}\delta\mu_i + \sum_{jk} a_{ijk}\mu_j^*\delta\mu_k \tag{12.13}$$

oder wenn wir nur die Beiträge erster Ordnung in ϵ von μ_j^* mitnehmen

or if we take into account only contributions of μ_j^* in first in ϵ

$$\frac{{\rm d}\delta\mu_i}{{\rm d}l} = \sum_k L_{ik}\delta\mu_k, \quad L_{ik} = y_i^{\rm tr}\delta_{ik} + a_{iuk}\mu_u^*. \tag{12.14}$$

Die Eigenwerte der Matrix L sind nun zu bestimmen. Soweit wir bei $d=4$ ($\epsilon = 0$) keine Entartung haben, sind die Eigenwerte durch die Diagonalelemente von L gegeben und wir erhalten

The eigenvalues of the matrix L have now to be determined. If there is no degeneracy at $d=4$ ($\epsilon = 0$), then the eigenvalues are given by the diagonal elements of L and we obtain

$$y_i^{\rm nt} = y_i^{\rm tr} + a_{iui}\mu_u^* + O(\epsilon^2) = y_i^{\rm tr} - \frac{2a_{iui}}{a_{uuu}}\epsilon. \tag{12.15}$$

Insbesondere für $i=u$ erhalten wir

In particular for $i=u$ we obtain

$$y_u^{\rm nt} = -\epsilon. \tag{12.16}$$

Der Operator $O_u = O_{40}$ wird also für $d < 4$ für den nicht-trivialen Fixpunkt irrelevant.

Thus the operator $O_u = O_{40}$ turns irrelevant for $d < 4$ for the non-trivial fixed point.

12.c Bestimmung der Koeffizienten a

12.c Determination of the coefficients a

Es sind die Koeffizienten a_{ijk}, insbesondere die a_{iui} zu bestimmen. In (11.15) haben wir gefunden, dass sich die Eigen-Operatoren O_i des trivialen Fixpunkts darstellen lassen als

The coefficients a_{ijk}, in particular the a_{iui} are to be determined. In (11.15) we have found, that the eigen-operators O_i of the trivial fixed point can be written

$$O_i = \exp(-\mathcal{Y})\hat{O}_i, \tag{12.17}$$

wobei $\hat{O}_i$ homogen in S von einer bestimmten Ordnung ist. Unter Verwendung von (12.4) folgt dann

where $\hat{O}_i$ is homogeneous in S of a certain order. By use of (12.4) one obtains

$$\exp(-\mathcal{Y}_S)\sum_{ijk}\hat{O}_i(S) = -2\exp(-\mathcal{Y}_S-\mathcal{Y}_T)\int_q h(q)\frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta T_{-\mathbf{q}}}\hat{O}_j(S)\hat{O}_k(T)\Big|_{T=S}, \tag{12.18}$$

wobei wir zur Unterscheidung auf welchen Operator $\hat{O}$ die Ableitung jeweils wirkt, zunächst S und T als Variable eingeführt haben und am Schluss $T=S$ setzen

where in order to distinguish on which operator $\hat{O}$ a derivative acts, we have initially introduced variables S and T and finally we put $T=S$

$$\sum_{ijk}\hat{O}_i(S) = -2\exp(\mathcal{Y}_{ST})\int_q h(q)\frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta T_{-\mathbf{q}}}\hat{O}_j(S)\hat{O}_k(T)\Big|_{T=S} \tag{12.19}$$

mit

with

$$\mathcal{Y}_{ST} = \int_q \frac{1}{u_2^*(q)}\frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta T_{-\mathbf{q}}}. \tag{12.20}$$

Wenn $\hat{O}_j$ und $\hat{O}_k$ von Ordnung j und k in S und T sind, dann erhält man durch m-fache Anwendung von $\mathcal{Y}_{\mathcal{ST}}$ die Beiträge zu den Operatoren $\hat{O}_i$ der Ordnung $j+k-2-2m$. Interessieren wir uns speziell für die $a_{n0,u,n0}$ der Operatoren

If $\hat{O}_j$ and $\hat{O}_k$ are of order j and k in S and T then one obtains upon m-fold application of $\mathcal{Y}_{\mathcal{ST}}$ the contributions to the operators $\hat{O}_i$ in order $j+k-2-2m$. If we are interested especially in the $a_{n0,u,n0}$ of the operators

$$\hat{O}_{n0} = \frac{1}{n!}\int_{q_1,\dots q_n}\phi(q_1)...\phi(q_n)(2\pi)^d\delta(\mathbf{q}_1+...+\mathbf{q}_n)S(\mathbf{q}_1)...S(\mathbf{q}_n), \tag{12.21}$$

so ist $\mathcal{Y}_{ST}$ einmal anzuwenden und man erhält

then $\mathcal{Y}_{ST}$ has to be applied once and one obtains

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_{ST}\int_q h(q)\frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta T_{-\mathbf{q}}}\hat{O}_{n0}(S)\hat{O}_u(T)\Big|_{T=S}\\
=\;&\frac{1}{n!}\int_{q_1,\dots q_n}\sum_{j<j'}\rho_1(|\mathbf{q}_j+\mathbf{q}_{j'}|)\phi(q_1)...\phi(q_n)(2\pi)^d\delta(\mathbf{q}_1+...+\mathbf{q}_n)S(\mathbf{q}_1)...S(\mathbf{q}_n)
\end{aligned} \tag{12.22}$$

mit

with

$$\rho_1(q) = \int_{q'} h(q')\phi^2(q')\frac{\phi^2(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|)}{u_2^*(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|)}. \tag{12.23}$$

Damit erhalten wir für O_{n0}

Thus we obtain for O_{n0}

$$a_{n0,u,n0} = -2\frac{n(n-1)}{2}\rho_1(0). \tag{12.24}$$

Daraus folgt dann zusammen mit (12.15)

which results together with (12.15) in

$$y_{n0} = 4-2n+\epsilon(\frac{n}{2}-1)-\frac{n(n-1)}{6}\epsilon = 4-2n+\epsilon\frac{-6+4n-n^2}{6}. \tag{12.25}$$

12.d Das $\hat{n}$-Vektormodell

12.d The $\hat{n}$-vector model

Vielfach hat der Ordnungs-Parameter mehrere Komponenten. Insbesondere geht man beim isotropen $\hat{n}$-Vektormodell vom trivialen Fixpunkt

Often the order parameter has several components. In particular one starts out from the trivial fixed point

$$H = Vu_0 + \frac{1}{2}\int_q u_2(q)\mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}} \tag{12.26}$$

mit $\hat{n}$ Komponenten $S_{\mathbf{q},\alpha}$. Die Eigenoperatoren des trivialen Fixpunkts können wir dann

of the isotropic $\hat{n}$-vector model with $\hat{n}$ components $S_{\mathbf{q},\alpha}$. The eigen-operators of the trivial fixed point can then be written

$$\tilde{O} = \exp(-\mathcal{Y}) \int_{q_1,...q_n} \phi(q_1)...\phi(q_n) P_r(q_1,...q_n) \sum_{\alpha_1,...\alpha_n} Y_{\alpha_1,...\alpha_n} S_{\mathbf{q}_1\alpha_1}...S_{\mathbf{q}_n\alpha_n} \tag{12.27}$$

mit

with

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \int_q \frac{1}{u_2^*(q)} \frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}\alpha} \delta S_{-\mathbf{q}\alpha}} \tag{12.28}$$

und den gleichen Exponenten schreiben. Es ist nun zweckmäßig, die Eigenoperatoren nach ihrem Verhalten unter Rotationen in $O(\hat{n})$ zu klassifizieren. Hierzu wählen wir

and the same exponents. It is useful to classify the eigen-operators according to their behavior under rotations under $O(\hat{n})$. For this purpose we choose

$$Y_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}+2m}} = Y^{\hat{l}}_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}}} \delta_{\alpha_{\hat{l}+1},\alpha_{\hat{l}+2}} ... \delta_{\alpha_{\hat{l}+2m-1},\alpha_{\hat{l}+2m}}. \tag{12.29}$$

Dabei sei $Y^{\hat{l}}_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}}}$ symmetrisch in seinen Indizes und

Here $Y^{\hat{l}}_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}}}$ is assumed to be symmetric in its indices and

$$\sum_\alpha Y^{\hat{l}}_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}-2},\alpha,\alpha} = 0. \tag{12.30}$$

In erster Ordnung in ϵ lautet nun der nichttriviale Fixpunkt

In first order in ϵ we have now the non-trivial fixed point

$$H^{\mathrm{nt}*} = H^{\mathrm{tr}*} + \mu_u^* O_u, \quad O_u = \frac{1}{8} \int_{q_1,q_2,q_3} \phi(q_1)\phi(q_2)\phi(q_3)\phi(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_2})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}). \tag{12.31}$$

Aus

From

$$\hat{Y}^{m\hat{l}}(\mathbf{S}) = \sum_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}}} Y^{\hat{l}}_{\alpha_1,...\alpha_{\hat{l}}} S_{\alpha_1}...S_{\alpha_{\hat{l}}} (S^2)^m \tag{12.32}$$

erhält man nach einiger Rechnung

one obtains after some calculation

$$\left(\sum_\alpha \frac{\delta^2}{\delta S_\alpha \delta T_\alpha} \right)^2 \hat{Y}^{m\hat{l}}(\mathbf{S})(T^2)^2 \Bigg|_{T=S} = 8\zeta_{m\hat{l}} \hat{Y}^{m\hat{l}}(\mathbf{S}) \tag{12.33}$$

mit

with

$$\zeta_{m\hat{l}} = (\hat{l} + 2m)(\hat{l} + 2m - 1) + 2m(\frac{\hat{n}}{2} + \hat{l} + m - 1). \tag{12.34}$$

Damit folgt

Then one obtains

$$a_{m\hat{l},u,m\hat{l}} = -2\zeta_{m\hat{l}}\rho_1(0). \tag{12.35}$$

und die Exponenten $y_{m\hat{l}}$ in erster Ordnung in ϵ

and the exponents $y_{m\hat{l}}$ in first order in ϵ

$$y_{m\hat{l}} = 4 - (2m + \hat{l}) + \epsilon(m + \frac{\hat{l}}{2} - 1 - 2\frac{\zeta_{m\hat{l}}}{\zeta_{20}}) + O(\epsilon^2), \tag{12.36}$$

wobei

where

$$\zeta_{20} = \zeta_u = 2(\hat{n} + 8). \tag{12.37}$$

Wir finden speziell

In particular we find

$$y_E = y_{10} = 2 - \frac{\hat{n} + 2}{\hat{n} + 8}. \tag{12.38}$$

Man beachte, dass die in 12.d verwendeten Doppelindizes $_{m\hat{l}}$ verschieden sind von den sonst verwendeten $_{nr}$. Bei den hier betrachteten Operatoren war $n = 2m + \hat{l}$, $r = 0$.

Observe that the double-indices $_{m\hat{l}}$ used in 12.d are different from $_{nr}$ used otherwise. For the operators considered here we had $n = 2m + \hat{l}$, $r = 0$.

12.e Der Exponent η

12.e The exponent η

Bisher haben wir den Operator O_{22} (11.25) nicht näher betrachtet. Da $y_{22}^{\mathrm{tr}} = 0$, können wir (12.10) nicht zur Berechnung von μ_{22}^* verwenden. Zunächst finden wir $a_{22,u,22} = 0$, da (12.22) mit $\hat{O}_i = \hat{O}_{22}$ einen Beitrag proportional zu $\hat{O}_{20}$ liefert. Allerdings ist $a_{22,u,u}$ verschieden von 0, so dass (11.8) in Ordnung ϵ verletzt ist. Hier nützt es nun, dass wir $h(0)$ frei wählen können. Wir hatten ursprünglich $h(0) = 1$ gewählt.

Until now we did not consider the operator O_{22} (11.25) closely. Since $y_{22}^{\mathrm{tr}} = 0$, we cannot use (12.10) for the calculation of μ_{22}^*. First we find $a_{22,u,22} = 0$, since (12.22) with $\hat{O}_i = \hat{O}_{22}$ yields a contribution proportional $\hat{O}_{20}$. However, $a_{22,u,u}$ is different from 0, so that (11.8) is violated in order ϵ. Now it becomes useful that we are free to choose $h(0)$. Originally we have chosen $h(0) = 1$.

Aber $h(0)$ ist mit dem Exponenten η verknüpft. Hierzu bilden wir

But $h(0)$ is related to the exponent η. Therefore we consider

$$\mathcal{G}(H^* + \mu_h S_{\mathbf{0}}) = \frac{d}{2}\mu_h S_{\mathbf{0}} + h(0)\mu_h (S_{\mathbf{0}} - 2\frac{\delta H^*}{\delta S_{\mathbf{0}}} + \text{const}). \tag{12.39}$$

Nun ist $\frac{\delta H^*}{\delta S_{\mathbf{0}}}$ ein redundanter Operator, kann also wegtransformiert werden. Damit finden wir

Now $\frac{\delta H^*}{\delta S_{\mathbf{0}}}$ is a redundant operator which can be transformed away. Thus we find

$$y_h = \frac{d}{2} + h(0). \tag{12.40}$$

Vergleichen wir mit der Beziehung nach (7.10), so finden wir $y_h = (d + 2 - \eta)/2$ und damit

If we compare with the relation after (7.10) then we find $y_h = (d + 2 - \eta)/2$ and thus

$$h(0) = 1 - \frac{\eta}{2}. \tag{12.41}$$

Damit werten wir

Thus we evaluate

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\eta H^{\mathrm{tr}*} - \mathcal{G}_0 H^{\mathrm{tr}*} &= -\frac{\eta}{2}\int_q \left[(S_{\mathbf{q}} - \frac{\delta H^{\mathrm{tr}*}}{\delta S_{-\mathbf{q}}})\frac{\delta H^{\mathrm{tr}*}}{\delta S_{\mathbf{q}}} + \frac{\delta^2 H^{\mathrm{tr}*}}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta S_{-\mathbf{q}}} - 1\right] \\ &= \int_q (1 - u_2^*(q))u_2^*(q) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} + \text{const.} = -\eta C \hat{O}_{22} \end{aligned} \tag{12.42}$$

aus, wobei wir (11.18) verwendet haben. Daraus folgt dann

where we have used (11.18). Then we obtain

$$-C\eta + \frac{1}{2}a_{22,u,u}\mu_u^{*2} = O(\epsilon^3). \tag{12.43}$$

Die Auswertung des Koeffizienten $a_{22,u,u}$ ergibt schließlich

The evaluation of the coefficient $a_{22,u,u}$ yields finally

$$\eta = \frac{1}{54}\epsilon^2 \tag{12.44}$$

für $\hat{n} = 1$. Für allgemeines $\hat{n}$ ergibt einmaliges, zweimaliges und dreimaliges Anwenden von

for $\hat{n} = 1$. For general $\hat{n}$ the application of

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2}{\partial S_\alpha \partial T_\alpha} \tag{12.45}$$

auf

once, twice and three times onto

$$\frac{1}{64}(S^2)^2(T^2)^2 \tag{12.46}$$

yields

$$\frac{1}{4}(\mathbf{ST})S^2T^2, \quad (\mathbf{ST})^2 + (\frac{\hat{n}}{4}+1)S^2T^2, \quad 3(\hat{n}+2)(\mathbf{ST}). \tag{12.47}$$

Daher ist $\eta \propto (\hat{n}+2)/(\hat{n}+8)^2$ und unter Verwendung des Ergebnisses für $\hat{n}=1$

Thus we have $\eta \propto (\hat{n}+2)/(\hat{n}+8)^2$ and using the result for $\hat{n}=1$

$$\eta = \frac{\hat{n}+2}{2(\hat{n}+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \tag{12.48}$$