# 11 Trivialer Fix-Punkt

Wilson und Kogut wählen für $\Psi$

# 11 Trivial Fixed Point

Wilson and Kogut choose $\Psi$ as

$$\Psi_{\mathbf{q}} = h(q)\left(S_{\mathbf{q}} - \frac{\delta H}{\delta S_{-\mathbf{q}}}\right) \tag{11.1}$$

und erhalten mit dieser Wahl den Generator der Renormierungsgruppe

and obtained with this choice the generator of the renormalization group

$$\mathcal{G}H = \int_q \left(\frac{d}{2}S_{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\nabla S_{\mathbf{q}}\right)\frac{\delta H}{\delta S_{\mathbf{q}}} + \int_q h(q)\left(\left(S_{\mathbf{q}} - \frac{\delta H}{\delta S_{-\mathbf{q}}}\right)\frac{\delta H}{\delta S_{\mathbf{q}}} + \frac{\delta^2 H}{\delta S_{\mathbf{q}}\delta S_{-\mathbf{q}}} - 1\right) + dV\frac{\partial H}{\partial V} \tag{11.2}$$

## 11.a Der Fixpunkt

Für eine freie Theorie der Form

## 11.a The Fixed Point

For a free theory of the form

$$H = Vu_0 + \frac{1}{2}\int_q u_2(q)S_{\mathbf{q}}S_{-\mathbf{q}} \tag{11.3}$$

erhält man die Differentialgleichung

one obtains the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}u_2(q)}{\mathrm{d}l} = 2h(q)(1-u_2(q))u_2(q) - q\frac{\mathrm{d}u_2(q)}{\mathrm{d}q}. \tag{11.4}$$

Die Fixpunkt-Lösung ($\mathrm{d}u_2^*(q)/\mathrm{d}l = 0$) hat die Form

The fixed-point solution ($\mathrm{d}u_2^*(q)/\mathrm{d}l = 0$) has the form

$$u_2^*(q) = \frac{Cq^{2h(0)}}{Cq^{2h(0)} + \exp(-\int_0^q (h(p)-h(0))\mathrm{d}p^2/p^2)} \tag{11.5}$$

was mit der Wahl $h(q) = h(0) + q^2$ auf

which with the choice $h(q) = h(0) + q^2$ yields

$$u_2^*(q) = \frac{Cq^{2h(0)}}{Cq^{2h(0)} + \exp(-q^2)} \tag{11.6}$$

führt. Da wir $u_2 \propto q^2$ für kleines $q$ verlangen, folgt $h(0) = 1$. Wir beobachten, dass $u_2^*(q)$ für großes $q$ gegen 1 strebt und nicht proportional zu $q^2$ anwächst.

. Since we require $u_2 \propto q^2$ for small $q$ we obtain $h(0) = 1$. We observe that $u_2^*(q)$ tends to 1 for large $q$ and no longer increases proportional to $q^2$.

## 11.b Lineare Abweichungen und Exponenten des trivialen Fixpunkts

Wir betrachten nun Abweichungen vom trivialen Fixpunkt in linearer Ordnung und zwar lokale Operatoren, für die dann

## 11.b Linear deviations and exponents of the trivial fixed-point

We consider deviations from the trivial fixed point in linear order and in particular for local operators, for which

$$\mathcal{L}\tilde{O} = -x\tilde{O} \tag{11.7}$$

gilt. Die homogen über den Raum ausgedehnten Operatoren erhalten wir aus (8.30) und (8.33) zu

holds. The operators homogeneously extended over space are obtained from (8.30) and 8.33) as

$$O = \int \mathrm{d}^d x\tilde{O}(\mathbf{x}), \quad \mathcal{L}\tilde{O} = y\tilde{O}, \quad y = d - x. \tag{11.8}$$

Die Gleichung (11.7) können wir

The equation (11.7) can be written

$$\int_q \mathcal{K}_{\mathbf{q}} \frac{\delta \tilde{O}}{\delta S_{\mathbf{q}}} + \int_q h(q) \frac{\delta^2 \tilde{O}}{\delta S_{\mathbf{q}} \delta S_{-\mathbf{q}}} = -x\tilde{O} \tag{11.9}$$

mit

with

$$\mathcal{K} = (\mathbf{q}\nabla S_{\mathbf{q}} + \frac{d}{2} S_{\mathbf{q}}) + h(q)(1 - 2u_2^*(q))S_{\mathbf{q}} \tag{11.10}$$

schreiben. Der erste Term in (11.9) ändert den Grad eines Ausdrucks in $S$ nicht. Der zweite erniedrigt ihn um zwei. Man kann nun zeigen, dass der Kommutator

. The first term in (11.9) does not change the degree in $S$ of the expression. The second lowers it by two. One can show that the commutator

$$[\mathcal{Y}, \int_q \mathcal{K}_{\mathbf{q}} \frac{\delta}{\delta S_{\mathbf{q}}}] = -\int_q h(q) \frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}} \delta S_{-\mathbf{q}}} \tag{11.11}$$

mit

obeys with

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \int_q \frac{1}{u_2^*(q)} \frac{\delta^2}{\delta S_{\mathbf{q}} \delta S_{-\mathbf{q}}} \tag{11.12}$$

erfüllt. Daraus folgt dann

. Then one obtains

$$\exp(\mathcal{Y}) \left( \int_q \mathcal{K}_{\mathbf{q}} \frac{\delta \tilde{O}}{\delta S_{\mathbf{q}}} + \int_q h(q) \frac{\delta^2 \tilde{O}}{\delta S_{\mathbf{q}} \delta S_{-\mathbf{q}}} \right) = \int_q \mathcal{K}_{\mathbf{q}} \frac{\delta}{\delta S_{\mathbf{q}}} \exp(\mathcal{Y})\tilde{O} = -x \exp(\mathcal{Y})\tilde{O}. \tag{11.13}$$

Diese Gleichung kann nun für

This equation can be

$$\exp(\mathcal{Y})\tilde{O} = \frac{1}{n!} \int_{q_1,\dots q_n} v_n(q_1, \dots q_n) S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n} \tag{11.14}$$

gelöst werden. Wir bemerken, dass

solved. We note that

$$\tilde{O} = \exp(-\mathcal{Y}) \frac{1}{n!} \int_{q_1,\dots q_n} v_n(q_1, \dots q_n) S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n} = \frac{1}{n!} \int_{q_1,\dots q_n} v_n(q_1, \dots q_n) : S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n} : \tag{11.15}$$

die Normal-Ordnung von

represents the normal ordering of

$$\frac{1}{n!} \int_{q_1,\dots q_n} v_n(q_1, \dots q_n) S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n}$$

darstellt. Da die Gleichung in den Variablen $q_i$ separiert

. Since the equation separates in the variables $q_i$

$$\sum_i \left( -\frac{d}{2} - q_i \nabla_i + h(q_i)(1 - 2u_2^*(q_i)) \right) v_n = -x v_n, \tag{11.16}$$

kann man die Lösung in der Form

the solution can be written in the form

$$v_n(q_1, \dots q_n) = P_r(q_1, \dots q_n) \prod_{i=1}^{n} \phi(q_i) \tag{11.17}$$

mit

with

$$\phi(q) = \sqrt{\frac{u_2^*(q)(1 - u_2^*(q))}{Cq^2}} \tag{11.18}$$

schreiben, wobei $P_r(q_1, \dots q_n)$ ein homogenes Polynom in den $q_i$ der Ordnung $r$ ist

where $P_r(q_1, \dots q_n)$ is a homogeneous polynomial in the $q_i$ of degree $r$

$$P_r(\lambda q_1, \dots \lambda q_n) = \lambda^r P_r(q_1, \dots q_n) \tag{11.19}$$

und and

$$x = (\frac{d}{2} - 1)n + r. \tag{11.20}$$

Man beachte, dass $\phi(q)$ für großes $q$ exponentiell abfällt und damit effektiv weich abgeschnitten wird. Für die ausgedehnten Operatoren erhält man aus (11.8) die Exponenten

$$y = d(1 - \frac{n}{2}) + n - r. \tag{11.21}$$

Von besonderem Interesse sind

$$n = 1,\, r = 0,\, y_h = \frac{d}{2} + 1, \qquad O_{10} = O_h = S_{\mathbf{0}}, \tag{11.22}$$

$$n = 2,\, r = 0,\, y_E = 2, \qquad O_{20} = O_E = \frac{1}{2} \int_q \phi^2(q) : S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} :, \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned} n = 4,\, r = 0,\, y_u = 4 - d, \qquad O_{40} = O_u = \frac{1}{24} \int_{q_1,q_2,q_3} & \phi(q_1)\phi(q_2)\phi(q_3)\phi(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3|) \\ & : S_{\mathbf{q}_1} S_{\mathbf{q}_2} S_{\mathbf{q}_3} S_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3} :, \end{aligned} \tag{11.24}$$

die wieder die Exponenten des trivialen Fixpunkts haben. Von einem gewissen Interesse ist auch

$$n = 2,\, r = 2,\, y_{22} = 0, \qquad O_{22} = \frac{1}{2} \int_q q^2 \phi^2(q) : S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} :, \tag{11.25}$$

das man als redundanten Operator mit

$$\psi_{\mathbf{q}} = (1 - u_2^*(q)) S_{\mathbf{q}} \tag{11.26}$$

erhält.