10 Wilson-Renormierung

10.a Fourier Transformation

Bei der Durchführung der Fourier-Transformation gibt für die Vorfaktoren verschiedene Wahlmöglichkeiten. Eine hatten wir im Abschnitt 5. Sie entspricht einer unitären Transformation. Das heißt

10 Wilson Renormalization

10.a Fourier Transformation

In performing the Fourier transform one has various choices for the factor in front. We had one in section 5. This one corresponds to a unitary transformation. This implies

$$\int [\mathrm{D}S] := \prod_{\mathbf{r}} (\mathrm{d}S(\mathbf{r})) = \int \prod_{\mathbf{q}} (\mathrm{d}S_{\mathbf{q}}). \tag{10.1}$$

In einer anderen setzt man

In a different one one puts

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{r}}, \tag{10.2}$$

was umgekehrt auf

which inversely yields

$$S_{\mathbf{q}} = \int \mathrm{d}^d r S(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{r}} \tag{10.3}$$

führt. Dann können wir H in der Form

. Then we may write H in the form

$$H = \int \mathrm{d}^d r \left(\frac{a}{2} S^2(\mathbf{r}) + \frac{c}{2} (\nabla S(\mathbf{r}))^2 + \frac{b}{4} S^4(\mathbf{r}) - h S(\mathbf{r}) \right) \tag{10.4}$$

und

and

$$H = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}} (a + cq^2) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} + \frac{b}{4V^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} S_{\mathbf{q}_1} S_{\mathbf{q}_2} S_{\mathbf{q}_3} S_{-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3} - h S_{\mathbf{0}} \tag{10.5}$$

schreiben. Man findet dann beim Übergang in den thermodynamischen Limes $V \to \infty$, $\Delta q \to 0$

. Then one finds in the transition to the thermodynamic limit $V \to \infty$, $\Delta q \to 0$

$$(\Delta q)^d = \frac{(2\pi)^d}{V} \tag{10.6}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) \to \int_q f(\mathbf{q}) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d q f(\mathbf{q}) \tag{10.7}$$

$$V \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} \to (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q}) \tag{10.8}$$

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} (a + cq^2) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} + \frac{b}{4} \int_{q_1, q_2, q_3} S_{\mathbf{q}_1} S_{\mathbf{q}_2} S_{\mathbf{q}_3} S_{-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3}. \tag{10.9}$$

Der Vorteil dieser Form besteht darin, dass wir nun keine Faktoren V oder N in der Wechselwirkung stehen haben, abgesehen etwa von einer additiven Konstanten Vu_0.

The advantage of this form is, that we have now no longer factors V or N in the interaction, apart perhaps of an additive constant Vu_0.

10.b Renormierung mit weichem Abschneiden

10.b Renormalization with smooth cut-off

Allgemein schreiben wir

In general we write

$$H = Vu_0 + u_1 S_{\mathbf{0}} + \frac{1}{2}\int_q u_2(\mathbf{q}) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} + \frac{1}{3!}\int_{q_1,q_2} u_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) S_{\mathbf{q}_1} S_{\mathbf{q}_2} S_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \frac{1}{4!}\int_{q_1,q_2,q_3} u_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) S_{\mathbf{q}_1} S_{\mathbf{q}_2} S_{\mathbf{q}_3} S_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3} + ... \quad (10.10)$$

Die us seien symmetrisch unter Permutationen der Wellenvektoren einschließlich dem letzten, der aus der Translationsinvarianz folgt

The us should be symmetric under permutation of the wave-vectors including the one which follows from translational invariance

$$u_2(-\mathbf{q}) = u_2(\mathbf{q}), \quad (10.11)$$

$$u_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = u_3(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1) = u_3(\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2), \quad \text{etc.} \quad (10.12)$$

10.b.α Dilatations-Transformation

10.b.α Dilatation transformation

Wir wollen nun eine Dilatations-Transformation durchführen. Das heißt wir führen eine Längentransformation um einen Faktor b durch, bei der sich Volumen und Wellenvektoren wie

Now we perform the dilatation transformation. That is, we perform a transformation of the length scale by a factor b, so that the volume and wave-vectors transform according to

$$V = b^d V', \quad q' = bq \quad (10.13)$$

transformieren. Für die Fourier-Komponenten von S wählen wir

. We choose for the Fourier components of S

$$\frac{1}{\sqrt{V}} S_{\mathbf{q}}, = \frac{1}{\sqrt{V'}} S'_{\mathbf{q}'}. \quad (10.14)$$

Die später folgende Transformation der S lässt auch andere Faktoren zu. Dann erhalten wir für $b = \mathrm{e}^l$ mit infinitesimalem l aus (10.10)

The transformation of the S which follows later allows for other factors. We obtain for $b = \mathrm{e}^l$ with infinitesimal l from (10.10)

$$H = V'(1+ld)u_0 + \left(1 + l\frac{d}{2}\right) u_1 S'_{\mathbf{0}} + \frac{1}{2}(1+ld)\int_q u_2(\mathbf{q}) S'_{(1+l)\mathbf{q}} S'_{-(1+l)\mathbf{q}} + ... \quad (10.15)$$

Daher transformiert sich H in $H + l\mathcal{G}_{\rm dil}H$ mit

Thus H transforms into $H + l\mathcal{G}_{\rm dil}H$ with

$$\mathcal{G}_{\rm dil}H = dV\frac{\partial H}{\partial V} + \int_q \left(\frac{d}{2}S_{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\nabla S_{\mathbf{q}}\right)\frac{\delta H}{\delta S_{\mathbf{q}}}. \quad (10.16)$$

Dabei bezieht sich die Ableitung $\frac{\partial H}{\partial V}$ nur auf den Vu_0-Term. Ausgedrückt durch die Kopplungen u_n erhalten wir

The derivative $\frac{\partial H}{\partial V}$ refers only to the Vu_0 term. In terms of the couplings u_n we obtain

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial l}\right|_{\rm dil} = \left(d - \frac{d}{2}n\right) u_n - \sum_i \mathbf{q}_i \nabla_i u_n(...q_i...). \quad (10.17)$$

Um (10.17) aus (10.16) herzuleiten, können wir entweder auf die Darstellung der Wechselwirkung durch Summen statt durch Integrale zurückgreifen oder wir betrachten

In order to derive (10.17) from (10.16) we may either return to the representation of the interaction in terms of sums instead of the integral or we consider

$$\mathcal{G}_{\rm dil}\int_{\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_n} v(\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_n) S_{\mathbf{q}_1}...S_{\mathbf{q}_n} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_n} v(\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_n)(\frac{d}{2} + \mathbf{q}_i\nabla_i) S_{\mathbf{q}_i}\prod_{j\neq i} S_{\mathbf{q}_j}. \quad (10.18)$$

Partielle Integration ergibt

Partial integration yields

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial l}\right|_{\text{dil}} = -\frac{d}{2} n v_n - \sum_i \mathbf{q}_i \nabla_i u_n(...q_i...). \tag{10.19}$$

Der Extra-term du_n in 10.17 rührt von der δ-Funktion in

The extra term du_n in 10 comes from the δ-function in

$$v_n = \delta(\mathbf{q}_1 + ... + \mathbf{q}_n) u_n \tag{10.20}$$

her und $x\delta'(x) = -\delta(x)$ auf alle Komponenten von $\mathbf{q}$ angewandt.

and $x\delta'(x) = -\delta(x)$ applied to all components of $\mathbf{q}$.

10.b.β Variablen-Transformation

10.b.β Transformation of variables

Der zweite Anteil der Renormierungsgruppen-Transformation besteht aus einer Variablen-Transformation. Wird sie geeignet gewählt, so wirkt sie wie ein weiches Abschneiden. Wir ersetzen

The second contribution of the renormalization-group transformation consists in a transformation of variables. If it chosen appropriately then it acts like a smooth cut-off

$$S_{\mathbf{q}} = S'_{\mathbf{q}} + l\Psi_{\mathbf{q}}\{S'\}, \tag{10.21}$$

wobei Ψ von den Fourier-Komponenten S' abhängt. Man erhält dann zunächst

where Ψ depends on the Fourier components S'. Then one obtains immediately

$$H\{S\} = H\{S'\} + l \int_q \Psi_{\mathbf{q}}\{S'\} \frac{\delta H\{S'\}}{\delta S'_{\mathbf{q}}}. \tag{10.22}$$

Die Transformation soll aber die Zustandssumme invariant lassen. Dann müssen wir noch die Funktionaldeterminate berücksichtigen

This transformation should leave the partition function invariant. Then we have to take into account the functional determinant

$$\int [\mathrm{D}S] = \int [\mathrm{D}S'] \frac{\partial\{S\}}{\partial\{S'\}} = \int \mathrm{d}S' \left(1 + l \int_q \frac{\delta\Psi_q\{S'\}}{\delta S'_{\mathbf{q}}}\right). \tag{10.23}$$

Mit diesem zusätzlichen Beitrag ergibt sich eine Änderung von H um $l\mathcal{G}_{\text{tra}}(\Psi)H$ mit

With this additional contribution one obtains a change of H by $l\mathcal{G}_{\text{tra}}(\Psi)H$ with

$$\mathcal{G}_{\text{tra}}(\Psi)H = \int_q \left(\Psi_{\mathbf{q}}\{S'\} \frac{\delta H\{S'\}}{\delta S'_{\mathbf{q}}} - \frac{\delta\Psi_q\{S'\}}{\delta S'_{\mathbf{q}}}\right). \tag{10.24}$$

10.b.γ Redundante Operatoren

10.b.γ Redundant operators

Das Hinzufügen eines infinitesimalen Beitrags aus der Transformation von H^* ergibt einen redundanten Operator

The addition of an infinitesimal contribution from the transformation of H^* yields a redundant operator

$$\mathcal{G}_{\text{tra}}(\Psi)H^*. \tag{10.25}$$