C

Homogenitätsgesetze und Renormierung

Homogeneity Laws and Renormalization

7 Skaleninvarianz und Homogenität

7.a Kritischer Punkt

Wir wollen jetzt die Idee der Skaleninvarianz einführen. Dazu betrachten wir etwa einen Ferromagneten oder ein Gas-Flüssigkeits-System am kritischen Punkt. Durch ein Mikroskop werden wir Domänen (oder Tröpfchen) unterschiedlicher Größe erkennen. Es wird Tröpfchen in Blasen und Bläschen in Tropfen geben, da der kritische Punkt durch starke Fluktuationen charakterisiert ist. Nun gehen wir zu einer geringeren Vergrößerung über und reduzieren den Kontrast in geeigneter Weise. Dann werden wir wesentlich das gleiche Bild vor uns haben, das heißt, auf der neuen Skala haben wir die gleiche Verteilung von Domänen (oder Tropfen) vor uns. Wir sagen: Das kritische System ist skaleninvariant. Nehmen wir an, die ursprüngliche Vergrößerung ergibt eine Korrelation des Ordnungsparameters

7 Scale Invariance and Homogeneity

7.a Critical Point

Now we will introduce the idea of scale invariance. For this purpose we may consider a ferromagnet or a gas-fluid system at the critical point. Looking through a microscope we will see domains (or droplets) of various sizes. We will find droplets in bubbles and bubbles in droplets, since the critical point is characterized by strong fluctuations. Let us now change to a lower magnification and reduce the contrast in an apropriate way. Then the picture will be essentially the same, that is, at the new scale we have the same distribution of domains (or droplets) before us. We say: The critical system is scale invariant. Let us assume the original magnification yields a correlation of the order parameter

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle = g(r). \tag{7.1}$$

Eine Vergrößerung der Längenskala um den Faktor b

A magnification of the length scale by a factor b

$$\mathbf{r} = b\mathbf{r}' \tag{7.2}$$

ändert die Dichte des Ordnungsparameters gemäß

changes the density of the order parameter according to

$$S(\mathbf{r})\mathrm{d}^d r = \tilde{S}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^d r' = b^{-d}\tilde{S}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^d r, \tag{7.3}$$

wobei d die Dimension des Raumes ist. Die Änderung des Kontrasts bewirkt einen weiteren Faktor, den wir mit b^{y_h} bezeichnen. Dann gilt

where d is the dimension of space. The change of the contrast causes another factor, which we denote by b^{y_h}. Then we have

$$S(\mathbf{r}) = b^{y_h-d}S'(\mathbf{r}') \tag{7.4}$$

und

and

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle = b^{2y_h-2d}\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle. \tag{7.5}$$

Da sich das beobachtete Bild nicht geändert hat, haben wir

Since the observed picture is unchanged, we have

$$\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle = g(r'), \tag{7.6}$$

woraus

from which we conclude

$$g(r) = b^{2(y_h-d)}g(r/b) \tag{7.7}$$

folgt. Diese Gleichung gilt für eine Änderung der Längenskala um einen Faktor (Vergrößerung) b. Wir können dies p mal anwenden

. This equation holds for a change of length scale (magnification) b. We may apply it p times

$$g(r) = b^{2(y_h-d)p}g(r/b^p) \tag{7.8}$$

und können b sehr nahe an eins wählen. Dann erhalten wir mit $b^p = L$ und beliebigem L

and may choose b close to unity. Then we obtain with $b^p = L$ and arbitrary L

$$g(r) = L^{2(y_h-d)}g(r/L). \tag{7.9}$$

Wählen wir schließlich $L = r$, so folgt

If we finally choose $L = r$, then we obtain

$$\langle S(0)S(\mathbf{r})\rangle_c = \frac{g(1)}{r^{d-2+\eta}} \tag{7.10}$$

mit dem kritischen Exponent $\eta = d + 2 - 2y_h$.

with the critical exponent $\eta = d + 2 - 2y_h$.

7.b Kritisches Gebiet

Im kritischen Gebiet ist unser System durch die Temperaturdifferenz $\tau = (T - T_c)/T_c$ und ein symmetriebrechendes Feld h charakterisiert. Wir beobachten das System wieder durch das Mikroskop. Wenn wir nun die Vergrößerung und den Kontrast wie vorher verändern, beobachten wir ein anderes Bild: Das System ist nicht mehr skaleninvariant. Bei einer geringeren Vergrößerung beobachten wir jedoch das Bild, das wir bei der ursprünglichen Vergrößerung bei einer anderen Temperaturdifferenz τ' und einem anderen symmetriebrechenden Feld h' beobachten. Daher ist die Änderung der Längenskala und der Skala des Ordnungsparameters äquivalent zu einer Abbildung von τ und h nach τ' und h'. Dann folgt für den Ordnungsparameter

7.b Critical Region

In the critical region our system is characterized by the temperature difference $\tau = (T-T_c)/T_c$ and a symmetry breaking field h. Again we view our system through the microscope. If we change the magnification and the contrast as before, then the situation has changed: The system is no longer scale-invariant. At a weaker magnification we observe however the picture that we had in the original magnification at a different temperature difference τ' and a different symmetry breaking field h'. Thus the change of the length scale and of the scale of the order parameter is equivalent to a mapping from τ and h to τ' and h'. Then we obtain for the order parameter

$$m(\tau, h) = \langle\langle S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} = b^{y_h-d}m(\tau', h'). \tag{7.11}$$

Für die Korrelation folgt

For the correlation one obtains

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} = b^{2(y_h-d)}\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle_{\tau',h'} \tag{7.12}$$

und damit für die Korrelationsfunktion G

and thus for the correlation function G

$$G(r,\tau,h) = \langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} - m^2(\tau,h) = b^{2(y_h-d)}G(\frac{r}{b}, \tau', h'). \tag{7.13}$$

Auf große Entfernungen ist der Zerfall der Korrelationsfunktion näherungsweise exponentiell,

At large distances the decay of the correlation function is approximately exponential,

$$G(r,\tau,h) \propto \frac{\exp(-r/\xi(\tau,h))}{r^{2(d-y_h)}}. \tag{7.14}$$

Dann folgt für die Korrelationslänge

Then one obtains for the correlation length

$$\xi(\tau,h) = b\xi(\tau',h'). \tag{7.15}$$

Eine ähnliche Beziehung erhält man für die Suszeptibilität (der Faktor $k_{\rm B}T$ ist hier weggelassen)

One obtains a similar relation for the susceptibility (here we leave aside the factor $k_{\rm B}T$)

$$\begin{aligned} \chi(\tau,h) &= \int \mathrm{d}^d r \langle (S(\mathbf{0})-m)(S(\mathbf{r})-m)\rangle_{\tau,h} \\ &= b^{2y_h-d}\int \mathrm{d}^d r \langle (S'(\mathbf{0})-m')(S'(\mathbf{r}')-m')\rangle_{\tau',h'} \\ &= b^{2y_h-d}\chi(\tau',h'). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Wir werden später finden, dass τ' und h' nichtsinguläre Funktionen von τ und h sind. Da sich definitionsgemäß $\tau=0$, $h=0$ auf $\tau'=0$, $h'=0$ abbilden, können wir für kleine τ und h

Later we will find that τ' and h' are non-singular functions of τ and h. Since according to the definition $\tau=0$, $h=0$ map to $\tau'=0$, $h'=0$, we may write for small τ and h

$$\tau' = \lambda_E\tau + \lambda' h, \tag{7.17}$$

$$h' = \lambda''\tau + \lambda_h h \tag{7.18}$$

schreiben. Da ein Vorzeichenwechsel von h nur das Vorzeichen von h' ändern wird, aber nicht τ', sind $\lambda'=\lambda''=0$. Wir betrachten nun den Spezialfall $\tau=0$. Dann gilt offensichtlich

. Since a change of sign of h will change only the sign of h', but not of τ', we have $\lambda'=\lambda''=0$. We consider the special case $\tau=0$. Then apparently

$$m(0,h) = b^{y_h-d}m(0,\lambda_h h), \tag{7.19}$$

$$\chi(0,h) = b^{2y_h-d}\chi(0,\lambda_h h). \tag{7.20}$$

Differenzieren wir (7.19) nach h, so folgt

holds. If we differentiate (7.19) with respect to h, then we obtain

$$\chi(0,h) = b^{y_h-d}\lambda_h\chi(0,\lambda_h h). \tag{7.21}$$

Der Vergleich von (7.20) mit (7.21) ergibt

Comparison of (7.20) with (7.21) yields

$$\lambda_h = b^{y_h}. \tag{7.22}$$

Ähnlich kann man durch Betrachtung des singulären Anteils der Energie und der spezifischen Wärme

Similarly one obtains from the consideration of the singular part the energy and the specific heat

$$\lambda_E = b^{y_E} \tag{7.23}$$

schreiben. Wenn wir nun $b^p = L$ wie früher setzen, dann erhalten wir die Homogenitätsgesetze

If we now put $b^p = L$ as before then we obtain the homogeneity laws

$$G(r,\tau,h) = L^{2(y_h-d)}G(\frac{r}{L},\tau L^{y_E},hL^{y_h}), \tag{7.24}$$

$$\xi(\tau,h) = L\xi(\tau L^{y_E},hL^{y_h}), \tag{7.25}$$

$$m(\tau,h) = L^{y_h-d}m(\tau L^{y_E},hL^{y_h}), \tag{7.26}$$

$$\chi(\tau,h) = L^{2y_h-d}\chi(\tau L^{y_E},hL^{y_h}). \tag{7.27}$$

Die Gleichung (7.26) kann nach h integriert werden. Dies ergibt die Dichte der freien Energie, die wir nun mit F bezeichnen (tatsächlich nur den singulären Anteil davon)

Equation (7.26) can be integrated with respect to h. This yields the density of the free energy, which we denote by F (actually only the singular part of it)

$$F_{\mathrm{sing}}(\tau, h) = L^{-d} F_{\mathrm{sing}}(\tau L^{y_E}, h L^{y_h}). \tag{7.28}$$

Diese Beziehung gibt wieder, dass sich die Dichte der freien Energie mit dem Faktor L^d wie das inverse Volumen umskalt, so dass die freie Energie selbst erhalten bleibt. Genau genommen ziehen wir aus der freien Energie auch noch den Faktor $k_{\mathrm{B}}T$ heraus,

This relation reveals, that the density of the free energy scales with the factor L^d like the inverse volume, so that the free energy itself is conserved. Strictly speaking a factor $k_{\mathrm{B}}T$ is extracted from the free enegy.

$$F = \mathcal{F}/(V_{\mathrm{P}} k_{\mathrm{B}} T). \tag{7.29}$$

Tatsächlich ist F_{sing} nicht die komplette Dichte der freien Energie. Es gibt noch einen regulären Anteil, der nicht zum kritischen Verhalten beiträgt,

F_{sing} is not the complete density of the free energy. THere is also a regular contribution which does not contribute to the regular behavior,

$$F = F_{\mathrm{sing}} + F_{\mathrm{reg}}. \tag{7.30}$$

Differenziert man (7.28) zweimal nach τ, so erhält man den singulären Anteil der spezifischen Wärme

If one differentiates (7.28) twice with respect to τ then one obtains the singular part of the specific heat

$$C_{\mathrm{sing}}(\tau, h) = L^{2y_E - d} C_{\mathrm{sing}}(\tau L^{y_E}, h L^{y_h}). \tag{7.31}$$

Aus diesen Ausdrücken können wir nun mit der Wahl $h = 0$ (manchmal auch $\tau = 0$) und $|\tau| L^{y_E} = 1$ ablesen, dass die kritischen Exponenten gegeben sind durch

From these expressions we can read of with the choice $h = 0$ (sometimes $\tau = 0$) and $|\tau| L^{y_E} = 1$ that the critical exponents are given by

$$\alpha = \frac{2y_E - d}{y_E}, \quad \beta = \frac{d - y_h}{y_E}, \quad \gamma = \frac{2y_h - d}{y_E}, \quad \delta = \frac{y_h}{d - y_h}, \quad \nu = \frac{1}{y_E}. \tag{7.32}$$

Da nur zwei Skalen-Exponenten y_h und y_E die kritischen Exponenten bestimmen, sind diese nicht unabhängig. Vielmehr gelten die Skalengesetze

Since only two scaling exponents y_h und y_E determine the critical exponents, they are not independent. The following scaling laws hold

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \tag{7.33}$$
$$2 - \alpha = d\nu, \tag{7.34}$$
$$\gamma = \nu(2 - \eta) \tag{7.35}$$
$$\delta\beta = \beta + \gamma = 2 - \alpha - \beta. \tag{7.36}$$

Der letzte Exponent wird auch mit Δ bezeichnet. Er verknüpft Größen, die sich jeweils in einer Ableitung nach h unterscheiden. Man prüfe diese Skalengesetze für die Daten in der Tabelle (4.2) nach. Für welche Dimension d sind die Skalengesetze für die Molekularfeld-Näherung erfüllt?

The last exponent is also denoted by Δ. It relates quantities which differ by derivatives of h. Check the scaling laws for the data of table (4.2). For which dimension d are the scaling laws fulfilled for molecular field approximation?

Die Homogenitätsgesetze lassen sich experimentell überprüfen. Wir gehen aus von Gleichung (7.26)

The homogeneity laws can be experimentally verified. We start from eq. (7.26)

$$m(\tau, h) = L^{y_h - d} m(\tau L^{y_E}, h L^{y_h}) \tag{7.37}$$

und legen L durch $|\tau|L^{y_E}=1$ fest. Dann folgt

and fix L by $|\tau|L^{y_E}=1$. Then one obtains

$$\frac{m}{|\tau|^{(d-y_h)/y_E}} = m(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}) \quad \begin{array}{l}\text{oder}\\ \text{or}\end{array} \quad \frac{m}{|\tau|^{\beta}} = m(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{\Delta}}). \tag{7.38}$$

Für den Ferromagneten $CrBr_3$ wurde $h/|\tau|^{\Delta}$ gegen $m/|\tau|^{\beta}$ aufgetragen (Ho und Litster, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 603). Man erkennt, dass die Messpunkte auf zwei Kurven, die eine für $T > T_c$, die andere für $T < T_c$ fallen. Eine ähnliche Auftragung gibt es auch für Nickel (Kouvel und Comly, Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1237). Siehe auch Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Kapitel 11, §4.

For the ferromagnet $CrBr_3$ $h/|\tau|^{\Delta}$ was plotted against $m/|\tau|^{\beta}$ (Ho and Litster, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 603). One observes, that the measured points fall on two curves, one for $T > T_c$, the other one for $T < T_c$. A similar plot exists for nickel (Kouvel und Comly, Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1237). See also Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, chapter 11, §4.

Die dabei beobachteten Exponenten sind für $CrBr_3$ $\beta = 0.368$, $\gamma = 1.215$, für Nickel $\beta = 0.378$, $\gamma = 1.34$.

The observed exponents are $\beta = 0.368$, $\gamma = 1.215$ for $CrBr_3$ and $\beta = 0.378$, $\gamma = 1.34$ for nickel.

Vergleichen wir mit der Zustandsgleichung des sphärischen Modells, (5.13), so finden wir, dass diese das Homogenitätsgesetz (7.37) für

If we compare with the equation of state for the spherical model, (5.13), then we find that it obeys the homogeneity law (7.37) for

$$y_E = d-2, \quad y_h = \frac{d}{2}+1 \tag{7.39}$$

erfüllt. Die Zustandsgleichung der Molekularfeld-Näherung gilt für die kritische Dimension $d=4$ mit

. The equation of state of the molecular field approximation holds for the upper critical dimension $d=4$ with

$$y_E = 2, \quad y_h = 3. \tag{7.40}$$

Die Idee, derartige Homogenitätsgesetze zu postulieren, geht auf Ben Widom zurück. Leo Kadanoff führte die Idee ein, dass man durch Mitteln der Spins in kleinen Kästchen zu einer neuen effektiven Wechselwirkung auf größerer Skala kommen kann, wobei diese am kritischen Punkt erhalten bleibt und gab damit eine Begründung für Homogenitätsgesetze. Ken Wilson gab schließlich ein effektives Verfahren zur Transformation der Wechselwirkung auf verschiedenen Skalen an.

The idea to postulate such homogeneity laws goes back to Ben Widom. Leo Kadanoff introduced the idea to average the spins in a box in order to obtain an effective interaction on a larger scale. He introduced the idea that this interaction is conserved at the critical point. He thus gave reasons for the homogeneity laws. Ken Wilson finally gave an effective procedure to transform the interaction between different scales.

8 Renormierungsgruppe

8.a Grundidee

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt ein intuitives Bild für die Homogenitätsgesetze entwickelt. In diesem Abschnitt wollen wir es mit Renormierungsgruppenideen begründen. Die Beobachtung, dass die Korrelationsfunktion am kritischen Punkt skaleninvariant ist, lässt vermuten, dass auch die effektive Wechselwirkung am kritischen Punkt diese Eigenschaft hat. Wir nennen die Prozedur, die die Skala der Wechselwirkung verändert, Renormierungsgruppe (RG). Wir bezeichnen die Hamilton-Funktion mit $\mathcal{H}$ und führen das dimensionslose

8 Renormalization Group

8.a Basic Idea

We developed an intuitive picture for the homogeneity laws in the preceeding section. In this section we will establish it with renormalization group ideas. The observation, that the correlation functions are scale invariant at the critical point, permits us to conjecture, that the effective interaction has the corresponding property at the critical point. We call the procedure which changes the scale of the interaction renormalization group (RG). We denote the Hamilton function by $\mathcal{H}$ and introduce the dimensionless

$$H = \mathcal{H}/(k_{\mathrm{B}}T), \tag{8.1}$$

das im Integral für die Zustandssumme auftritt, das wir in Zukunft als Hamilton-Funktion bezeichnen. Die Dichte der freien Energie ist definiert als

which appears in the integral for the partion function, which from now on we call Hamilton function. The density of the free energy is defined as

$$-F = \frac{1}{V_{\mathrm{P}}} \ln \operatorname{tr} \exp(-H). \tag{8.2}$$

Die Renormierungsgruppen-Transformation besteht nun aus zwei Schritten
a) einer Änderung der Längenskala um einen Faktor $b = \mathrm{e}^l$ in allen linearen Dimensionen. Wir lassen dabei die Zustandssumme $Z = \ln \operatorname{tr} \exp(-H)$ invariant. Da das Volumen um den Faktor e^{dl} schrumpft, gilt für die Dichten F

The renomalization group transformation consists of two steps
(i) a change in length scale by a factor $b = \mathrm{e}^l$ in all linear dimensions. By doing this we leave the partition function $Z = \ln \operatorname{tr} \exp(-H)$ invariant. Since the volume shrinks by the factor e^{dl}, we obtain for the density

$$F_0 = \mathrm{e}^{-dl} F_l. \tag{8.3}$$

b) einer Elimination und/oder Transformation der Freiheitsgrade S, die die freie Energie invariant lässt.

Der zweite Schritt ist notwendig, um einen Hamilton-Operator zu erhalten, der mit dem ursprünglichen verglichen werden kann. Die Dichte der Freiheitsgrade S muss auf die ursprüngliche reduziert werden durch das Ausdünnen der Freiheitsgrade, die Fluktuationen kurzer Wellenlängen beschreiben (Fourier-Komponenten mit großen Wellenvektoren). Zum anderen muss das System erweitert werden auf eines mit dem Volumen des ursprünglichen. Dann gibt es eine eins-zu-eins-Entsprechung der ursprünglichen und der neuen Variablen.

(ii) the elimination and/or the transformation of the degrees of freedom S, which leaves the free energy invariant.

The second step is necessary, in order to obtain a Hamiltonian which can be compared with the original one. The density of the degrees of freedom S has to be reduced to the original one by thinning out the degrees of freedom, which describe fluctuations at short wave-lengths (Fourier components with large wave-vectors). On the other hand the system has to be extended to one with the same volume as the original one. Then there is a one-to-one correspondence between the original and the new variables.

Wenn wir unser System unter dem Mikroskop betrachten, beobachten wir unter geringerer Vergrösserung weniger Details, was dem Eliminations-Prozess entspricht. Andererseits beobachten wir dann ein größeres Volumen, was der Erweiterung des Volumens entspricht.

If we consider our system under a microscope, then we observe at weak magnification less details, which corresponds to the elimination process. On the other hand we observe a larger volume which corresponds to the extension of the volume.

Die vollständige RG-Transformation von H_0 nach H_l schreiben wir

The complete RG transformation from H_0 to H_l can be written

$$H_l = R_l(H_0), \quad F(H_0) = \mathrm{e}^{-dl} F(H_l). \tag{8.4}$$

In vielen Fällen ist es möglich, die RG-Prozedur für infinitesimales l zu formulieren. Dann kann die erste Gleichung (8.4) in differentieller Form geschrieben werden

In many cases it is possible to formulate the RG-procedure for infinitesimal l. Then the first equation (8.4) can be written in differential form

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}l} = \mathcal{G}H, \tag{8.5}$$

wobei $\mathcal{G}$ der Generator der Renormierungsgruppe ist. Im allgemeinen wirkt $\mathcal{G}$ nichtlinear auf H.

where $\mathcal{G}$ is the generator of the renormalization group. In general $\mathcal{G}$ acts non-linearly on H.

8.b Fixpunkt, Klassifizierung von Operatoren

8.b Fixed point, classification of operators

Nun machen wir zwei Annahmen:
a) Wir nehmen an, dass es eine Fixpunkt-Hamilton-Funktion H^* gibt,

Now we make two assumptions:
(i) We assume that there is a fixed point Hamiltonian H^*,

$$\mathcal{G}H^* = 0. \tag{8.6}$$

H^* ist eine Hamilton-Funktion, die sich auf sich selbst abbildet.
b) Wir nehmen an, dass eine kritische Hamilton-Funktion gegen H^* konvergiert.

H^* is a Hamiltonian which maps into itself.
(ii) We assume that a critical Hamiltonian converges towards H^*.

$$\lim_{l\to\infty} H_l = H^*. \tag{8.7}$$

Dies ist eine wesentlich schwächere Bedingung als die Forderung, die kritische Hamilton-Funktion H_0 sei H^*. Die Bedingung (8.7) verlangt nur, dass die effektive Wechselwirkung unter der Renormierungsgruppe gegen einen Fixpunkt konvergiert.

This condition is essentially weaker the the requirement the critical Hamiltonian H_0 be H^*. The condition (8.7) requires only, that the effective interaction converges towards the fixed point under the action of the renormalization group.

Um nun das kritische Verhalten zu untersuchen zerlegen wir den Generator $\mathcal{G}$ in den Anteil $\mathcal{L}$ linear in ΔH und den Beitrag $\mathcal{Q}$ in höherer Ordnung in ΔH,

In order to investigate the critical behaviour we separate the generator $\mathcal{G}$ into a a contribution $\mathcal{L}$ linear in ΔH and the contribution $\mathcal{Q}$ in higher order in ΔH,

$$\mathcal{G}(H^* + \Delta H) = \mathcal{L}\Delta H + \mathcal{Q}(\Delta H). \tag{8.8}$$

Es gilt also $\mathcal{Q}(\Delta H) = O(\Delta H)^2$. Wir definieren nun Eigen-Operatoren (Eigen-Funktionen)

Thus $\mathcal{Q}(\Delta H) = O(\Delta H)^2$ holds. Now we define the eigen operators (eigen functions)

$$\mathcal{L}O_i = y_i O_i \tag{8.9}$$

und nehmen im Folgenden an, dass die Eigen-Operatoren einen kompletten Satz von Operatoren bilden, so dass jede Hamilton-Funktion (jeder Hamilton-Operator) H_0 entwickelt werden kann als

and assume in the following that the eigen operators constitute a complete set of operators so that any Hamiltonian H_0 can be expanded as

$$H_0 = H^* + \sum_i \mu_i O_i. \tag{8.10}$$

Dann erhalten wir in linearer Ordnung in μ

then we obtain in linear order in μ

$$H_l = H^* + \sum_i \mu_i \mathrm{e}^{y_i l} O_i. \tag{8.11}$$

Je nach Eigenwert y unterscheidet man

Dependimg on the eigenvalue y one distinguishes

$$\begin{aligned} y > 0 &\quad \text{relevante Operatoren / relavant operators} \\ y = 0 &\quad \text{marginale Operatoren / marginal operators} \\ y < 0 &\quad \text{irrelevante Operatoren / irrelavant operators.} \end{aligned} \tag{8.12}$$

Der Gleichung (8.11) entnimmt man unmittelbar, dass am kritischen Punkt die Felder (in der Feldtheorie Quellen) μ_i aller relevanten Operatoren verschwinden müssen.

We gather immediately from eq. (8.11) that all fields (in field theory sources) μ_i of relevant operators have to vanish.

Marginale Operatoren können als relevante oder irrelevante Operatoren agieren. Dies hängt davon ab, ob die nichtlinearen Terme μ_i nach Null oder von Null wegtreiben. Es gibt auch den seltenen Fall, dass ein marginaler Operator eine Linie von Fixpunkten erzeugt wie beim zweidimensionalen Acht-Vertex-Modell.

Marginal operators may act as relevant or irrelevant operators, depending on whether the nonlinear terms carry μ_i to zero or away from zero. There is also the rare case, where a marginal operator generates a line of fixed points like in the two-dimensional eight-vertex model.

Es gibt einen speziellen Operator, den konstanten (das heißt den von S unabhängigen) Beitrag $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$, für den formal

There is a special operator, the constant (that is independent of S) contribution $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$, for wich formally

$$O_0 = V_{\mathrm{P}}, \quad y_0 = d \tag{8.13}$$

gilt, da das Volumen V_{P} um einen Faktor e^{-dl} schrumpft, was durch ein Anwachsen von μ_0 um einen Faktor e^{dl} kompensiert wird. Das Hinzufügen einer Konstanten ändert am kritischen Verhalten jedoch nichts. Er ist der Ursprung des regulären Anteils der freien Energie.

holds, since the volume V_{P} shrinks by a factor e^{-dl}, which is compensated by an increase of μ_0 by a factor e^{dl}. However, the addition of a constant does not change the critical behaviour. It is the source of the regular part of the free energy.

Die Art des kritischen Verhaltens hängt von der Anzahl der symmetrie-erhaltenden relevanten Operatoren ab. (Symmetrie-erhaltend bedeutet, dass die Symmetrie des Hamilton-Operators erhalten bleibt; eine spontan gebrochene Symmetrie des Systems wird dadurch nicht ausgeschlossen.) Entwickeln wir

The type of critical behaviour depends on the number of symmetry conserving relevant operators. (Symmetry conserving means that the symmetry of the hamiltonian is conserved under addition of such an operator; spontaneous symmetry breaking of the system is not excluded.) If we expand

$$\mathcal{H} = \sum_i \mu_i^0 O_i, \quad H^* = \sum \mu_i^* O_i, \tag{8.14}$$

so erhalten wir

then we obtain

$$\mu_i = \beta \mu_i^0 - \mu_i^*. \tag{8.15}$$

Für einen normalen kritischen Punkt hat man einen relevanten symmetrie-erhaltenden Operator (außer O_0) O_E, der die kritische Temperatur bestimmt

One has one relevant symmetry-conserving operator (apart from O_0) O_E, which determines the critical temperature

$$\mu_E \equiv \tau = \beta\mu_E^0 - \mu_E^* = (\beta - \beta_c)\mu_E^0, \quad \beta_c = \frac{\mu_E^*}{\mu_E^0}. \tag{8.16}$$

Grob gesprochen ist O_E proportional zu H abzüglich Erwartungswert am kritischen Punkt. An einem trikritischen Punkt hat man zwei relevante symmetrie-erhaltende Operatoren (außer O_0) und folglich zwei Bedingungen für kritisches Verhalten.

Roughly speaking O_E is proportional to H minus its expectation value at the critical point. At a tricritical point one has two relevant symmetry conserving operators (besides O_0) and consequently two conditions for criticality.

Die RG-Prozedur ist nicht eindeutig definiert. Dies hat eine Anzahl von Folgerungen, die wir hier nur aufzählen (F.W., J. Physics C7 (1974) 2098): H^* hängt von der RG-Transformation ab. Variiert man die RG-Transformation infinitesimal, dann ändert sich H^* um Operatoren, die wir redundant nennen. Formal hängen die Exponenten y der redundanten Operatoren von der Wahl der RG ab, aber die redundanten Operatoren tragen nicht zur freien Energie bei. Daher haben die Exponenten der redundanten Operatoren keine physikalische Bedeutung. Die Exponenten der anderen Operatoren sind invariant gegen infinitesimale Variationen der RG-Gleichungen. Redundante Operatoren können in numerischen Rechnungen recht störend sein, wenn sie formal Eigenwerte $y > 0$ haben. Sie haben nur kurzreichweitige Korrelationen.

The RG procedure is not uniquely defined. This has a number of consequences which we here only enumerate (F.W., J. Physics C7 (1974) 2098): H^* depends on the RG transformation. If one varies the RG transformation infinitesimally, then H^* changes by operators, which we call redundant. The exponents y of the redundant operators depend formally on the choice of the RG, but the redundant operators do not contribute to the free energy. Thus the exponents of the redundant operators do not have a physical meaning. The exponents of the other operators are invariant against infinitesimal variations of the RG equations. Redundant operators can be perturbing in numerical calculations, if they have formally eigenvalues $y > 0$. They have only short-range correlations.

8.c Skalen der freien Energie

8.c Scaling of the free energy

Nehmen wir an, es reiche aus, nur zwei Operatoren, O_E und den Operator des Ordnungs-Parameters O_h zu berücksichtigen,

Let us assume, it is sufficient to take into account only the two operators, O_E and the operator of the order parameter O_h,

$$H_0 = H^* + \tau O_E + hO_h, \tag{8.17}$$

was mit

which with

$$H_l = H^* + \tau e^{y_E l} O_E + h e^{y_h l} O_h \tag{8.18}$$

dann

yields

$$F(\tau, h) = e^{-dl} F(\tau e^{y_E l}, h e^{y_h l}) \tag{8.19}$$

ergibt. Dies stimmt mit $L = e^l$ mit der Gleichung für den singulären Anteil der freien Energie (7.28) unseres intuitiven Bilds überein.

. This agrees with $L = e^l$ with the equation for the singular part of the free energy (7.28) of our intuitive picture.

Normalerweise hat man eine unendliche Anzahl von Störungen $\mu_i O_i$ in Gleichung (8.10). Um ihren Effekt auf das Homogenitätsgesetz zu betrachten, fügen wir wenigstens einen hinzu,

Normally one has an infinite number of perturbations $\mu_i O_i$ in equation (8.10). In order to observe their effect on the homogeneity law, we add at least one of them,

$$H_0 = H^* + \tau O_E + hO_h + \mu_i O_i \tag{8.20}$$

und erhalten

and obtain

$$H_l = H^* + \tau e^{y_E l} O_E + h e^{y_h l} O_h + \mu_i e^{y_i l} O_i, \tag{8.21}$$

$$F(\tau, h, \mu_i) = |\tau|^{d/y_E} F(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, \frac{\mu_i}{|\tau|^{y_i/y_E}}). \tag{8.22}$$

Wir interessieren uns für das kritische Verhalten, das heißt den Limes $\tau \to 0$

We are now interested in the critical behaviour, that is in the limit $\tau \to 0$

$$\lim \frac{\mu_i}{|\tau|^{y_i/y_E}} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & y_i < 0 \text{ oder } \mu_i = 0 \\ \pm\infty & y_i > 0 \text{ und } \mu_i \neq 0. \end{array} \right. \tag{8.23}$$

Falls O_i relevant ist, ($y_i > 0$), dann muss μ_i explizit berücksichtigt werden. Für irrelevante Operatoren kann der Term $\mu_i/|\tau|^{y_i/y_E}$ vernachlässigt werden, wenn F nach Potenzen von μ_i entwickelt werden kann. Man beachte, dass die rechte Seite von (8.21) die freie Energie weit entfernt vom kritischen Punkt enthält. Der irrelevante Operator führt zu einer Korrektur zum Skalen-Verhalten

If O_i is relevant, ($y_i > 0$), then μ_i has to be taken into account explicitely. For irrelevant operators the term $\mu_i/|\tau|^{y_i/y_E}$ can be neglected, if F can be expanded in powers of μ_i. Note, that the right hand side of (8.21) contains the free energy far away from the critical point. The irrelevant operator yields a correction to the scaling behaviour

$$F = |\tau|^{d/y_E} F(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, 0) + \mu_i |\tau|^{(d-y_i)/y_E} F'(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, 0) + ... \tag{8.24}$$

Solch eine Korrektur wurde im superfluiden Helium gefunden (G. Ahlers, Phys. Rev. A8 (1973) 530).

Such a correction has been found in superfluid helium (G. Ahlers, Phys. Rev. A8 (1973) 530).

8.d Korrelationen

8.d Correlations

Bisher haben wir nur translationsinvariante Operatoren betrachtet. Wir können auch die Eigenwertgleichung für einen lokalen Operator $\tilde{O}_i$ betrachten

Until now we considered only translational invariant operators. We may also consider the eigen value equation for local operators $\tilde{O}_i$

$$\mathcal{L}\tilde{O}_i = -x_i \tilde{O}_i. \tag{8.25}$$

Dann ergibt sich in linearer Näherung aus

Then one obtains in linear approximation from

$$H_0 = H^* + \lambda_i \tilde{O}_i \tag{8.26}$$

die Hamilton-Funktion

the Hamiltonian

$$H_l = H^* + \lambda_i e^{-x_i l} \tilde{O}_i. \tag{8.27}$$

An Stelle von $\tilde{O}_i$, das eine Funktion der $S(\mathbf{r}')$ ist, können wir $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ betrachten, das wir erhalten, indem wir $S(\mathbf{r}')$ durch $S(\mathbf{r}' + \mathbf{r})$ ersetzen. Dieser Operator $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ wirkt in der Umgebung von $\mathbf{r}$. Aus

Instead of $\tilde{O}_i$, which is a function of the $S(\mathbf{r}')$, we may consider $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$, which we obtain by replacing $S(\mathbf{r}')$ by $S(\mathbf{r}' + \mathbf{r})$. This operator $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ acts in the vicinity of $\mathbf{r}$. From

$$H_0 = H^* + \lambda_i \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{8.28}$$

folgt dann

we obtain

$$H_l = H^* + \lambda_i e^{-x_i l} \tilde{O}_i(\mathbf{r} e^{-l}), \tag{8.29}$$

da die Längenskala unter der RG-Transformation um den Faktor e^{-l} schrumpft.

since the length scale shrinks under the RG transformation by the factor e^{-l}.

Wir können nun die Exponenten x_i und y_i durch Einführen des translationsinvarianten Operators

We may now connect the exponents x_i and y_i by introducing the translational invariant operator

$$O_i = \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{8.30}$$

miteinander verknüpfen. Wir erhalten dann aus

. Then

$$H_0 = H^* + \mu_i O_i = H^* + \mu_i \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{8.31}$$

die Hamilton-Funktion

yields the hamiltonian

$$\begin{aligned} H_l &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{-x_i l} \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}) \\ &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{(d-x_i)l} \int \mathrm{d}^d (r\mathrm{e}^{-l}) \tilde{O}_i(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}) \\ &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{(d-x_i)l} O_i. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Der Vergleich mit (8.11) ergibt

Comparison with (8.11) yields

$$y_i = d - x_i, \tag{8.33}$$

es sei denn das Integral verschwindet, was passiert, wenn man den Gradienten eines Operators $\tilde{O}_i$ betrachtet. Man überzeugt sich in diesem Fall leicht, dass aus (8.29)

unless the integral vanishes which happens if we consider the gradient of an operator $\tilde{O}_i$. In this case one easily sees that one obtains

$$\mathcal{L}\nabla\tilde{O}_i = -(x_i + 1)\nabla\tilde{O}_i \tag{8.34}$$

folgt.

from (8.29).

Aus einem Hamilton-Operator

Starting from the hamiltonian

$$H_0 = H^* + \tau O_E + h O_h + \lambda_1 \tilde{O}_h(\mathbf{0}) + \lambda_2 \tilde{O}_h(\mathbf{r}) \tag{8.35}$$

folgt dann

we obtain

$$H_l = H^* + \tau \mathrm{e}^{y_E l} O_E + h \mathrm{e}^{y_h l} O_h + \lambda_1 \mathrm{e}^{(y_h - d)l} \tilde{O}_h(\mathbf{0}) + \lambda_2 \mathrm{e}^{(y_h - d)l} \tilde{O}_h(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}). \tag{8.36}$$

Differenzieren wir die zugehörige freie Energie (diesmal nicht die Dichte), so erhalten wir die Korrelationsfunktion

If we differentiate the corresponding free energy (this time not the density), then we obtain the correlation function

$$G(\mathbf{r}, \tau, h) = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} (V_0 F(H_0))|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \tag{8.37}$$

Da die freie Energie unter der Renormierungsgruppe erhalten bleibt, $V_0 F(H_0) = V_l F(H_l)$, folgt

Since the free energy is conserved under the renormalization group, $V_0 F(H_0) = V_l F(H_l)$, we obtain

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \tau, h) &= -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} (V_l F(H_l))|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \\ &= \mathrm{e}^{2(y_h - d)l} G(r\mathrm{e}^{-l}, \tau \mathrm{e}^{y_E l}, h \mathrm{e}^{y_h l}), \end{aligned} \tag{8.38}$$

womit dann auch (7.24) hergeleitet ist.

so that also (7.24) has been derived.

8.e Nichtlineare Beiträge

Bisher haben wir angenommen, dass wir nur den linearen Term $\mathcal{L}$ des Generators $\mathcal{G}$ zu berücksichtigen brauchen. Wir wollen nun betrachten, was nicht-lineare Terme bewirken. Dazu nehmen wir auch Beiträge zweiter Ordnung in $\mathcal{G}$ mit und erhalten die Gleichungen

8.e Non-linear contributions

Until now we have assumed, that only the linear term $\mathcal{L}$ of the generator $\mathcal{G}$ has to be taken into account. Now we will consider what the non-linear terms bring about. For this purpose we take the terms in second order in $\mathcal{G}$ into account and obtain the equations

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}l} = y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3) \tag{8.39}$$

8.e.α Nichtlineare Skalenfelder

Wir können nun nicht-lineare Skalenfelder g_i einführen, die exakt

8.e.α Non-linear scaling fields

Now we may introduce non-linear scaling fields g_i, which obey exactly

$$\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}l} = y_i g_i \tag{8.40}$$

genügen sollen, wobei auch diese nach den μ entwickelt werden,

where these have to be expanded in the μs,

$$g_i = \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} b_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3). \tag{8.41}$$

Setzen wir nun (8.41) in (8.40) ein, so folgt

Substituting (8.41) into (8.40) we obtain

$$y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{i,j,k}\mu_j\mu_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k}(y_j + y_k) b_{i,j,k}\mu_j\mu_k = y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} y_i b_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3), \tag{8.42}$$

was mit

which is solved by

$$b_{i,j,k} = \frac{a_{i,j,k}}{y_i - y_j - y_k} \tag{8.43}$$

gelöst wird. Solange also jeweils $y_i \neq y_j + y_k$ (und entsprechende Ungleichungen für Terme in höherer Ordnung in μ), kann man diese Skalenfelder g einführen. Für diese gilt exakt

. As long as $y_i \neq y_j + y_k$ (and similar inequalities for terms in higher order in μ), one can introduce these scaling fields g. For these one obtains exactly

$$F(...\, g_i\, ...) = \mathrm{e}^{-dl} F(...\, g_i \mathrm{e}^{y_i l}\, ...). \tag{8.44}$$

8.e.β Regulärer Anteil der freien Energie

Addiert man eine Konstante zur Wechselwirkung, so ändert diese nur μ_0 im Beitrag $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$ in Gleichung (8.13). Sie wirkt sich aber nicht auf die anderen μ aus. Daher gilt

8.e.β Regular part of the free energy

If one adds a constant to the interaction, then this changes only μ_0 in the contribution $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$ in equation (8.13). It does not effect the other μs. Thus one has

$$F(g_0\, ...\, g_i\, ...) = g_0 + F(0\, ...\, g_i\, ...). \tag{8.45}$$

Der reguläre Term der freien Energie ist nun

The regular term in the free energy is

$$F_{\mathrm{reg}} = g_0 = \mu_0 + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{a_{0,j,k}}{d - y_j - y_k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3), \tag{8.46}$$

während der zweite Beitrag in (8.45) der singuläre Beitrag ist. Der reguläre Beitrag wird in der Regel einen Beitrag proportional τ^2 enthalten, der dann einen Untergrund zur spezifischen Wärme liefert.

whereas the second contribution in (8.45) is the singular contribution. Normally the regular contribution will contain a contribution proportional to τ^2, which yields a background to the specific heat.

8.e.γ Logarithmische spezifische Wärme

8.e.γ Logarithmic specific heat

Falls der kritische Exponent der spezifischen Wärme verschwindet, $\alpha = 0$, folgt aus (7.32) $2y_E = d$. In diesem Fall kann das Skalenfeld g_0 nicht so einen einfachen Term proportional τ^2 haben, da der Nenner in (8.43) verschwindet. Beschränken wir uns auf das Gleichungssystem

If the critical exponent of the specific heat vanishes, $\alpha = 0$, then (7.32) yields $2y_E = d$. In this case the scaling field g_0 will not simply have a term proportional τ^2, since the denominator in (8.43) vanishes. Restricting us to the system of equations

$$\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}l} = d\mu_0 + \frac{1}{2}a_{0,E,E}\tau^2, \quad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = y_E\tau, \tag{8.47}$$

so folgt

then we obtain

$$g_0 = \mu_0 - \frac{1}{2}a_{0,E,E}(l - l_0)\tau^2, \quad g_E = \tau. \tag{8.48}$$

Dabei ist l_0 eine Integrationskonstante. Wir können nun, da g_E mit $\mathrm{e}^{dl/2}$ anwächst, $l - l_0 = \frac{2}{d}\ln|g_E| = \frac{2}{d}\ln|\tau|$ schreiben und finden schließlich

Here l_0 is a constant of integration. Since g_E increases like $\mathrm{e}^{dl/2}$, we may write $l - l_0 = \frac{2}{d}\ln|g_E| = \frac{2}{d}\ln|\tau|$ and obtain finally

$$g_0 = \mu_0 - \frac{1}{d}a_{0,E,E}\tau^2\ln|\tau|, \quad g_E = \tau. \tag{8.49}$$

Jetzt steckt in dem bisher regulären g_0 die logarithmische Singularität, während der singuläre Anteil $\tau^2 F_{\mathrm{sing}}(\tau = \pm 1)$ einen Sprung in der spezifischen Wärme enthalten kann. Eine logarithmische Singularität der spezifischen Wärme tritt im zweidimensionalen Ising-Modell auf (Onsager). Im Acht-Vertex-Modell (Baxter) findet man logarithmische Singularitäten der Form $(T - T_{\mathrm{c}})^n \ln|T - T_{\mathrm{c}}|$ für gerade n. Die hier gegebene Erklärung findet sich bereits bei Widom und bei Kadanoff.

In g_0, which was until now regular, a logarithmic singularity has been plugged in, whereas the singular part $\tau^2 F_{\mathrm{sing}}(\tau = \pm 1)$ may contain a jump in the specific heat. A logarithmic singularity in the specific heat appears in the two-dimensional Ising model (Onsager). In the eight-vertex model (Baxter) a logarithmic singularity of the form $(T - T_{\mathrm{c}})^n \ln|T - T_{\mathrm{c}}|$ is found for even n. This explanation was already given by Widom and Kadanoff.

8.e.δ Marginaler Operator

8.e.δ Marginal operator

Interessantes Verhalten ergibt sich auch, wenn ein marginaler Operator O_m auftritt, $y_m = 0$. Dann folgt aus

An interesting behaviour is found when a marginal operator O_m appears, $y_m = 0$. Then one obtains from

$$\frac{\mathrm{d}\mu_m}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}a_{mmm}\mu_m^2 \tag{8.50}$$

die Lösung

the solution

$$\mu_m(l) = -\frac{2}{a_{mmm}(l + l_0)} = \frac{2\mu_m(0)}{2 - a_{mmm}l\mu_m(0)}. \tag{8.51}$$

Falls $a_{mmm}\mu_m(0)$ und damit $l_0 = 2/(a\mu_m(0))$ negativ ist, konvergiert $\mu_m(l)$ (sehr) langsam gegen 0, ist es dagegen positiv, so divergiert es. Hat man nun für τ die Gleichung

If $a_{mmm}\mu_m(0)$ and thus $l_0 = 2/(a\mu_m(0))$ is negative, then $\mu_m(l)$ converges (very) slowly towards 0, if it is positive, however, then it diverges. If the equation for τ reads

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = y_E\tau + a_{EmE}\mu_m\tau, \tag{8.52}$$

so folgt

then one obtains

$$\tau(l) = \mathrm{e}^{y_E l}\left(\frac{l+l_0}{l_0}\right)^{-2a_{EmE}/a_{mmm}} \tau(0). \tag{8.53}$$

Dies führt dazu, dass man für Erwartungswerte nicht nur Potenzen von τ, sondern auch Potenzen von τ multipliziert mit nicht ganzzahligen Potenzen von $|\ln|\tau||$ erhalten kann. Solche Singularitäten wurden zuerst für das sphärische Modell gefunden, später generell für die S^4-Theorie in $d = 4$ Dimensionen (Larkin und Khmelnitskii), wie auch für die S^6-Theorie in $d = 3$ Dimensionen (Riedel und F.W.). Dies gilt auch in $d = 3$ für bestimmte Systeme mit Dipol-Wechselwirkung.

This has the consequence, that one obtains not only powers of τ, but also powers of τ multiplied by non-integer powers of $|\ln|\tau||$ for expectation values. Such singularities have been found at first for the spherical model, later generally for the S^4 theory in $d = 4$ dimensions (Larkin and Khmelnitskii), as well as for the S^6 theory in $d = 3$ dimensions (Riedel und F.W.). This applies also for particular systems with dipolar interaction in $d = 3$ dimensions.

Literaturangaben in

Literature in

F.W., The Critical State, General Aspects, in C. Domb and M.S. Green (eds.) Phase Transitons and Critical Phenomena, Academic Press, 6 (1976) p.7-124

9 Renormierungs-Gruppe mit scharfem Abschneide-Impuls

9.a Ursprung der Renormierung

Das Problem der Renormierung trat zunächst in der Teilchenphysik auf. Es besteht darin, dass bei der störungstheoretischen Berechnung von Größen Integrale auftreten, die divergieren, und zwar um so stärker, je höher die Ordnung der Entwicklung ist. Was tun? Die Integrale divergieren meist bei großen Wellenvektoren. Führt man einen maximalen Wellenvektor ein, bis zu dem man integriert, so bleiben die Integrale endlich. Man weiß aber nicht, welchen maximalen Wellenvektor Λ man verwenden soll. Man verglich daher die Ergebnisse für verschiedene große Λ und fand, dass man bei geeignetem Umskalen verschiedener Größen und geeignetem Verändern von Kopplungen einen Limes $\Lambda \to \infty$ definieren kann, der endliche Ergebnisse für Größen von festen Wellenvektoren ergibt. Das Verfahren, das einem den Zusammenhang der Kopplungen und Skalen mit der Änderung des Abschneide-Impulses Λ ergibt, nennt man Renormierungsgruppe.

In der Festkörperphysik hat man dieses Problem in der Regel nicht. Man geht zum Beispiel von einem periodischen Gitter aus. Dann sind die Integrationen nur innerhalb der Brillouinzone auszuführen. Man hat einen natürlichen Abschneide-Impuls Λ. Trotzdem ist auch hier die Renormierungsgruppe bei den kritischen Phänomenen eingezogen. Der Grund liegt darin, dass sich dort das wesentliche Verhalten auf sehr großen Abständen abspielt oder entsprechen für Wellenvektoren $\mu \to 0$. Kritische Phänomene und die Teilchenphysik haben gemeinsam, dass man das Verhältnis Λ/μ gegen unendlich untersuchen muss. Daher müssen wir auch hier die Längenskala ändern und sind (zumindest bei einem scharfen Abschneiden) gezwungen, die Freiheitsgrade, die nach dem Umskalen Wellenvektoren größer Λ haben, auszuintegrieren und zu verfolgen, wie sich dadurch die effektive Wechselwirkung bei kleinen Wellenvektoren entwickelt.

9 Renormalization Group with Sharp Momentum Cut-off

9.a Origin of Renormalization

The problem of renormalization appeared initially in particle physics. It consists in the problem, that in a perturbative calculation of physical quantities integrals appear, which diverge, and the stronger the higher the order in the expansion is. What to do? Most often the integrals diverge at large momenta. If one introduces a maximum for the wave-vectors, then the integrals remain finite. It is not clear, what should be the maximal wave vector Λ. Comparing the results for different Λ one found, that an appropriate rescaling of various quantities and an appropriate change of the couplings allows one to define a limit $\Lambda \to \infty$, which yields finite results for quantities at fixed wave-vectors. The procedure which yields the connection between the couplings and scales and the change of the cut-off momentum Λ, is called renormalization group.

One usually does not have this problem in solid state physics. One starts for example from a periodic lattice. Then the integrals run over the Brillouin zone. Then one has a natural cut-off momentum Λ. But also here the renormalization group entered for critical phenomena. The reason is, that there the essential behaviour ranges over large distances and correspondingly for wave-vectors $\mu \to 0$. Critical phenomena and particle physics have in common that one has to investiagate the limit of the ratio Λ/μ approaching infinity. Thus also here the length scale has to be changed and we are forced (at least for a sharp cut-off) to integrate over the degrees of freedom which carry wave-vectors larger then Λ after rescaling and to follow how the effective interaction changes at small wave-vectors.

9.b Renormierung der Landau-Wechselwirkung

9.b Renormalization of the Landau interaction

Wir wollen nun eine explizite Rechnung mit der Renormierungs-Gruppe durchführen. Wir gehen aus von einer Wechselwirkung der Form vom Landau-Typ

We will perform an explicit calculation of the renormalization group. We start from an interaction of Landau type

$$H = \int \mathrm{d}^d r \left(\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{S}(\mathbf{r}))^2 + \frac{a_1}{2}\mathbf{S}(\mathbf{r})^2 - \mathbf{h}\mathbf{S}(\mathbf{r}) + \frac{a_2}{4}(\mathbf{S}(\mathbf{r})^2)^2 \right). \tag{9.1}$$

Diese Wechselwirkung haben wir gleich für das isotrope n-Vektormodell hingeschrieben. Das Feld unseres Ordnungsparameters hat also n Komponenten und die Wechselwirkung ist isotrop (bis auf den Term $\mathbf{hS}$, der für $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ eine Richtung auszeichnet).

We have written down this interaction for the isotropic n vector model. The field of our order parameter has n components and the interaction is isotropic (apart from the term $\mathbf{hS}$ which distinguishes a direction for $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$).

Wir führen zunächst die Skalentransformationen durch. Dies ergibt mit $\eta = 0$

First we perform a scale transformation. It yields with $\eta = 0$

$$H' = \int \mathrm{d}^d r' \left(\frac{1}{2}(\nabla' \mathbf{S}'(\mathbf{r}'))^2 + \frac{a_1}{2} b^2 \mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2 - \mathbf{h} b^{d/2+1}\mathbf{S}'(\mathbf{r}') + \frac{a_2}{4} b^{4-d}(\mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2)^2 \right), \tag{9.2}$$

wobei wir $\mathbf{r} = b\mathbf{r}'$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = b^{1-d/2}\mathbf{S}'(\mathbf{r}')$ substituiert haben. Wir lassen im Folgenden die Striche $'$ weg. Wir drücken die Wechselwirkung nun durch die Fourier-Komponenten

where we have substituted $\mathbf{r} = b\mathbf{r}'$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = b^{1-d/2}\mathbf{S}'(\mathbf{r}')$. In the following we omit the primes $'$. We express the interaction by the Fourier components

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V_\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{9.3}$$

aus und erhalten

and obtain

$$H' = \sum_{\mathbf{q}} \frac{q^2 + a_1 b^2}{2} \mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}} - \sqrt{V_\mathrm{P}}\mathbf{h} b^{d/2+1}\mathbf{S}_{\mathbf{0}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{4V_\mathrm{P}} \sum (\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_2})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}). \tag{9.4}$$

Wir gehen davon aus, dass die ursprüngliche Wechselwirkung H Fourier-Komponenten bis Λ enthielt. Auf Grund der Skalentransformation enthält die Wechselwirkung H' Fourier-Komponenten bis Λb. Wir müssen daher die Fourier-Komponenten zwischen Λ und Λb eliminieren. Wir müssen daher

We start out from the premise that the original interaction H contains Fourier components of the field up to the cut-off wave-vector Λ. The interaction H' contains due to the scale transformation Fourier components up to Λb. Thus we have to eliminate the Fourier components between Λ and Λb. Thus we have to integrate

$$\mathrm{e}^{-H_l} = \prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha} \left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha} \right) \mathrm{e}^{-H'} \tag{9.5}$$

ausintegrieren. Dabei numeriert der Index $_\alpha$ die n Komponenten von $\mathbf{S}$. Wir werten dieses Integral aus, indem wir uns fragen: Wie ändern sich die Koeffizienten a_1 und a_2 vor $\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2$ und $(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2)^2$? Diese Beiträge rühren her von

The index $_\alpha$ numerates the n components of $\mathbf{S}$. We evaluate the integral by asking: How do the coefficients a_1 and a_2 in front of $\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2$ and $(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2)^2$ change? These coefficients come from

$$\Delta H' = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (q^2 + b^2 a_1)\mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{2V_\mathrm{P}} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}})(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2) + \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\mathbf{S}_{\mathbf{q}}\mathbf{S}_{\mathbf{0}})(\mathbf{S}_{-\mathbf{q}}\mathbf{S}_{\mathbf{0}}). \tag{9.6}$$

Mit der Wahl $b = \mathrm{e}^l$, l infinitesimal, sind alle anderen Beiträge vernachlässigbar. Wir schreiben diese Wechselwirkung in der Form

With the choice $b = \mathrm{e}^l$, l infinitesimally, all other contributions are negligible. We write the interaction in the form

$$\Delta H' = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (q^2 + b^2 a_1) S_{\mathbf{q}\alpha} S_{-\mathbf{q}\beta} (\delta_{\alpha,\beta} + f_{\alpha,\beta}), \tag{9.7}$$

wobei

where

$$f_{\alpha\beta} = c'(\delta_{\alpha,\beta} \mathbf{S}_\mathbf{0}^2 + 2 S_{\mathbf{0}\alpha} S_{\mathbf{0}\beta}), \quad c' = \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}(q^2 + b^2 a_1)}. \tag{9.8}$$

Nun ist

We have

$$\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q},1} \mathrm{d}S_{\mathbf{q},2} ... \mathrm{d}S_{\mathbf{q},n} \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},1} \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},2} ... \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},n} \exp\left(- \sum_{\alpha\beta} (q^2 + b^2 a_1) S_{\mathbf{q}\alpha} S_{-\mathbf{q}\beta} (\delta_{\alpha,\beta} + f_{\alpha,\beta}) \right)$$
$$= \frac{\mathrm{const}}{(q^2 + b^2 a_1)^n \det(1+f)}, \tag{9.9}$$

was

which yields

$$\prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha} \left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha} \right) \exp(-\Delta H') = \mathrm{const} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f)) \tag{9.10}$$

ergibt. Wir entwickeln nun nach Potenzen von f

. We expand now in powers of f

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f) &= \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln(1 + \sum_\alpha f_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (f_{\alpha\alpha} f_{\beta\beta} - f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}) + ...) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\sum_\alpha f_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} + ...) \end{aligned} \tag{9.11}$$

Für infinitesimales l ergibt die Summe

The sum yields for infinitesimal l

$$\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} g(q) = V_\mathrm{P} l c g(\Lambda), \tag{9.12}$$

wobei c eine Konstante ist und sich c' auf

where c is a constant and c' reduces to

$$c' = \frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)} \tag{9.13}$$

reduziert. Damit haben wir dann

. Thus we have

$$\sum_\alpha f_{\alpha\alpha} = (n+2) \frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)} \mathbf{S}_\mathbf{0}^2, \tag{9.14}$$

$$\sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = (n+8) \frac{a_2^2}{V_\mathrm{P}^2 (a_1 + \Lambda^2)^2} (\mathbf{S}_\mathbf{0}^2)^2 \tag{9.15}$$

und damit schließlich den Beitrag der Eliminations-Prozedur

and thus finally the contribution to the eleimination procedure

$$\frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f) = \frac{1}{2}(n+2) \frac{lca_2}{a_1 + \Lambda^2} \mathbf{S}_\mathbf{0}^2 - \frac{1}{4}(n+8) \frac{lca_2^2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)^2} (\mathbf{S}_\mathbf{0}^2)^2. \tag{9.16}$$

Berücksichtigen wir die Änderung von a_1, a_2 und h nach (9.4) und (9.16), so erhalten wir die Differentialgleichungen

Considering the changes of a_1, a_2 and h according to (9.4) and (9.16) we obtain the differential equations

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{a_2 c(n+2)}{a_1+\Lambda^2}, \tag{9.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (4-d)a_2 - \frac{a_2^2 c(n+8)}{(a_1+\Lambda^2)^2}, \tag{9.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = (\frac{d}{2}+1)h. \tag{9.19}$$

9.c ϵ-Entwicklung

9.c ϵ expansion

Für den Fixpunkt muss nun gelten

For the fixed-point we have

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = 0. \tag{9.20}$$

Da die soeben durchgeführte Rechnung exakt ist für $a_2 = 0$, erwarten wir, dass sie eine gute Näherung für kleine a_2 darstellt. Auf Grund der Landau-Theorie erwarten wir, dass a_1 im kritischen Gebiet klein ist. Wir entwickeln daher die Gleichungen bis zur quadratischen Ordnung in den as,

Since the calculation we have performed is exact for $a_2 = 0$, we expect that it is a good approximation for small a_2. On the basis of the Landau theory we expect, that a_1 is small in the critical region. Thus we expand the equations up to second order in the as,

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{c}{\Lambda^2}(n+2)a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_1 a_2, \tag{9.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \epsilon a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+8)a_2^2, \tag{9.22}$$

wobei wir die Abkürzung

where we have introduced the abbreviation

$$\epsilon = 4-d \tag{9.23}$$

eingeführt haben.

.

Wir finden dann
a) den trivialen Fixpunkt mit

Then we find
(i) the trivial fixed point with

$$a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad h^* = 0, \tag{9.24}$$

b) den nicht-trivialen Fixpunkt

(ii) the non-trivial fixed point

$$a_1^* = -\frac{\epsilon(n+2)\Lambda^2}{2(n+8)}, \quad a_2^* = \frac{\epsilon\Lambda^4}{c(n+8)}, \quad h^* = 0. \tag{9.25}$$

Diese Größen sind also für kleines ϵ tatsächlich klein. Linearisieren wir jetzt die Gleichungen um den Fixpunkt, so finden wir

These quantities are indeed small for small ϵ. If we linearize the equations around the fixed point we obtain

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = (2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_1-a_1^*) + ...(a_2-a_2^*), \tag{9.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (\epsilon - \frac{2c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_2-a_2^*). \tag{9.27}$$

Daraus ergeben sich dann die Skalenexponenten für den trivialen Fixpunkt

From these equations we obtain the scaling exponents for the trivial fixed point

$$y_E = 2, \quad y_2 = \epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2} \tag{9.28}$$

und für den nicht-trivialen Fixpunkt zu

and for the non-trivial fixed point

$$y_E = 2 - \frac{n+2}{n+8}\epsilon, \quad y_2 = -\epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{9.29}$$

Für $d < 4$ hat der nicht-triviale Fixpunkt einen, der triviale Fixpunkt zwei relevante symmetrieerhaltende Operatoren. Daher erwartet man für $d < 4$, dass der nicht-triviale Fixpunkt das Verhalten in der Umgebung eines normalen kritischen Punktes beschreibt. Der triviale Fixpunkt beschreibt das trikritische Verhalten in drei Dimensionen.

For $d < 4$ the non-trivial fixed-point has one, the trivial fixed-point has two relevant symmetry conserving operators. Thus one expects for $d < 4$, that the non-trivial fixed point describes the behaviour in the vicinity of a normal critical point. The trivial fixed point describes the tricritical behaviour in three dimensions.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = 1. \tag{9.30}$$

Wir hatten anfangs $\eta = 0$ gesetzt. Natürlich ist diese Größe zunächst unbestimmt. Zu bestimmen ist sie aus dem Vorfaktor von $(\nabla\mathbf{S}(\mathbf{r}))^2$. In der Tat ist dieser Term der Hamilton-Funktion der einzige, der nicht klein ist. Er muss erhalten bleiben. Es stellt sich heraus, ohne dass wir das näher untersucht haben, dass η in erster Ordnung in ϵ gleich Null bleibt.

Es sei erwähnt, dass man bei der obigen Rechnung zum Beispiel eine kubische Anisotropie $\sum_\alpha S_\alpha^4(\mathbf{r})$ hinzufügen kann. Es ergibt sich dann ein interessantes Flussdiagram für a_2 und die neue Kopplung.

Initially we have put $\eta = 0$. Of course this quantity is initially undetermined. It has to be determined by the prefactor of $(\nabla\mathbf{S}(\mathbf{r}))^2$. This term is the only one in the hamiltonian which is not small. It must be conserved. It turns out, (we do not investigate this here) that η remains zero in first order in ϵ.

We mention that in the calculation above one can add a cubic anisotropy $\sum_\alpha S_\alpha^4(\mathbf{r})$. Then one obtains an interesting flow-diagram for a_2 and the new coupling.

9.d Ergebnisse für das isotrope n-Vektormodell

Was wir soeben betrachtet haben, ist der Anfang der ϵ-Entwicklung, das heißt einer Entwicklung der Exponenten in Potenzen von $\epsilon = 4 - d$. Die Terme in Ordnung ϵ haben wir gerade berechnet. Wir geben noch die Terme in Ordnung ϵ^2 an. Aus η und γ kann man die anderen Exponenten α, β, δ und ν aus (7.33) bis (7.36) berechnen. Der Exponent ω beschreibt die führende Korrektur zum Skalen, $\omega = (d - y_i)/y_E$ in (8.24)

9.d Results for the isotropic n vector model

What we have considered now, is the beginning of an ϵ expansion, that is an expansion of the exponents in powers of $\epsilon = 4 - d$. We have just calculated the terms in order ϵ. We give the terms in order ϵ^2. From η and γ one can calculate the other exponents α, β, δ and ν using (7.33) to (7.36). The exponent ω describes the leading correction to scaling, $\omega = (d - y_i)/y_E$ in (8.24)

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{9.31}$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{9.32}$$

$$\omega = \epsilon - \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \tag{9.33}$$

Wir beobachten, dass die Exponenten sowohl von der Dimension $4-\epsilon$ als auch von der Anzahl n der Komponenten des Ordnungsparameters $\mathbf{m} = \langle \mathbf{S} \rangle$ abhängen. Systeme, die durch ein und denselben Fixpunkt beschrieben werden, haben gleiche kritische Exponenten. Man sagt, sie gehören zur gleichen Universalitätsklasse. Konventionelle kritische und trikritische Phasenübergänge gehören zu verschiedenen Universalitätsklassen. Systeme mit der langreichweitigen Dipol-Wechselwirkung werden durch eine weitere Universalitätsklasse beschrieben.

Stanley hat gezeigt, dass das n-Vektormodell im Limes $n \to \infty$ durch das sphärische Modell beschrieben wird. Für dieses erhält man im Bereich $2 < d \leq= 4$ die Exponenten $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$.

We observe that the exponents depend both on the dimension $4-\epsilon$ and on the number n of components of the order parameter $\mathbf{m} = \langle \mathbf{S} \rangle$. Systems which are described by one and the same fixed point have the same critical exponents. One says, they belong to the same universality class. Conventional critical and tricritical phase transitions belong to different universality classes. Systems with long-range dipolar interaction are described by another universality class.

Stanley has shown, that the n-vector model is described by the sperical model in the limit $n \to \infty$. For this one obtains in the region $2 < d \leq= 4$ the exponents $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$.