13 Quanten-Halleffekt

13.a Freie Elektronen im Magnetfeld und im elektrischen Feld

13.a.α Wiederholung aus der Mechanik und Bewegungsgleichungen

In der Hamilton-Mechanik leitet man für ein Elektron im elektromagnetischen Feld die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}v^2 - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + e\Phi(\mathbf{r}) \tag{13.1}$$

her. Dabei ist $\mathbf{A}$ das Vektor-Potential und Φ das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes. Hieraus ergeben sich die Komponenten des kanonischen Impulses

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = mv_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha \tag{13.2}$$

und damit die Hamilton-Funktion

$$H = p_\alpha v_\alpha - L = (mv_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha)v_\alpha - \frac{m}{2}v^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi = \frac{m}{2}v^2 - e\Phi \tag{13.3}$$

oder, wenn wir $\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})$ einsetzen

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - e\Phi. \tag{13.4}$$

Dabei ist $\mathbf{p}$ der kanonische Impuls, für den klassisch die kanonischen Poisson-Klammern und quantenmechanisch die kanonischen Kommutator-Relationen gelten. Hingegen ist $\mathbf{P} = m\mathbf{v} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ der mechanische Impuls.

Für diesen gelten die Kommutator-Relationen

$$[P_\alpha, P_\beta] = [p_\alpha + \frac{e}{c}A_\alpha, p_\beta + \frac{e}{c}A_\beta] = \frac{e\hbar}{\mathrm{i}c}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \frac{e\hbar}{\mathrm{i}c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma. \tag{13.5}$$

Die Komponenten des mechanischen Impulses kommutieren also nicht miteinander. Man erhält die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathbf{r}, H] = \frac{1}{2m\mathrm{i}\hbar}([\mathbf{r}, p_\alpha]P_\alpha + P_\alpha[\mathbf{r}, p_\alpha]) = \frac{\mathbf{P}}{m}, & (13.6)\\
\dot{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2m\mathrm{i}\hbar}[\mathbf{P}, P^2] + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathbf{P}, e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}] = \frac{1}{2m\mathrm{i}\hbar}([\mathbf{P}, P_\alpha]P_\alpha + P_\alpha[\mathbf{P}, P_\alpha]) - e\mathbf{E} & \\
&= -\frac{e}{2c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{r}}) - e\mathbf{E} & (13.7)
\end{aligned}$$

wie in der klassischen Mechanik. (Hieraus folgt für homogene Felder die Überlagerung von Zyklotron-Schwingungen der Frequenz $\omega_\mathrm{c} = \frac{eB}{mc}$ und falls $\mathbf{E}$ senkrecht zu $\mathbf{B}$ steht eine Trift mit der Geschwindigkeit $\frac{cE}{B}$.)

13.a.β Quantenmechanische Behandlung

Wir bestimmen nun die Eigenfunktionen in einem Magnetfeld, dessen Richtung wir parallel zur z-Achse annehmen, und einem dazu senkrecht stehenden in x-Richtung orientierten elektrischen Feld,

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = B\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{A} = Bx\mathbf{e}_y, \tag{13.8}$$

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi = E\mathbf{e}_x, \qquad \Phi = -eEx. \tag{13.9}$$

Der Schrödinger-Gleichung lautet dann

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{c}x\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + eEx\right)\psi = \epsilon\psi \tag{13.10}$$

Da die y- und z-Komponenten des Impulses mit H vertauschen, können wir für die Wellenfunktion ψ ansetzen

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y y + k_z z)}\hat{\psi}(x). \tag{13.11}$$

Damit lautet die Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y + \frac{eB}{c}x)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}k_z^2 + eEx\right)\hat{\psi} = \epsilon\hat{\psi} \tag{13.12}$$

oder mit

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{eB}{mc}, \quad x_0 = -\frac{\hbar c k_y}{eB} + \frac{mc^2 E}{eB^2} \tag{13.13}$$

finden wir

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2}\omega_\mathrm{c}^2(x-x_0)^2\right)\hat{\psi} = \left(\epsilon - \frac{\hbar^2}{2m}k_z^2 - eEx_0 + \frac{mc^2E^2}{2B^2}\right)\hat{\psi}. \tag{13.14}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators der Frequenz ω_c, der um x_0 zentriert ist. Die Energie-Eigenwerte ergeben sich dann zu

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m}k_z^2 + eEx_0 - \frac{mc^2E^2}{2B^2} + \hbar\omega_\mathrm{c}(\nu + \frac{1}{2}). \tag{13.15}$$

Die Quantenzahl ν charakterisiert das jeweilige Landau-Niveau. Ohne äußeres elektrisches Feld sind die Energien von x_0 unabhängig. Wir wollen feststellen, wieviele Zustände in einem Niveau liegen, und betrachten dazu ein Quadrat in der x, y-Ebene mit Kantenlänge L. In y-Richtung verlangen wir periodische Randbedingungen. Dann erhalten wir für benachbarte Zustände

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L}, \quad \Delta x_0 = \frac{2\pi\hbar c}{LeB}. \tag{13.16}$$

Damit ergibt sich eine Entartung

$$\hat{N} = \frac{L}{\Delta x_0} = \frac{L^2 eB}{2\pi\hbar c} \tag{13.17}$$

Man hat also pro Flächeneinheit $\frac{eB}{2\pi\hbar c}$ Zustände in einem Landau-Niveau. Wir betrachten nun den Halleffekt und bestimmen dazu die Geschwindigkeiten der Elektronen

$$\langle v_x\rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\langle\partial_x\rangle = 0, \quad \langle v_y\rangle = \frac{1}{m}\langle\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_y\rangle + \frac{eB}{mc}\langle x\rangle = \frac{1}{m}(\hbar k_y + \frac{eB}{c}x_0) = c\frac{E}{B}. \tag{13.18}$$

Für ein gefülltes Landau-Niveau eines zweidimensionalen Elektronengases erhält man damit die Hallstromdichte

$$j_y = en\langle v_y\rangle = e\frac{\hat{N}}{L^2}\langle v_y\rangle = \frac{e^2B}{hc}c\frac{E}{B} = \frac{e^2}{h}E \tag{13.19}$$

Dabei ist n die Dichte der Elektronen pro Fläche. Man erhält also eine Hallleitfähigkeit pro gefülltem Landau-Niveau

$$\sigma_\mathrm{H} = \frac{j_y}{E_x} = \frac{e^2}{h}. \tag{13.20}$$

13.b Ganzzahliger Halleffekt

Der ganzzahlige Quanten-Halleffekt wurde von v. Klitzing entdeckt, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 496. Erste Erklärungen wurden gegeben von Laughlin, Phys. Rev. B 23 (1981) 5632 und Halperin, Phys. Rev. B 25 (1982) 2158. Beobachtet wurde, dass in Schichten, die Elektronen tragen, bei Anlegen eines starken Magnetfeldes senkrecht zur Schicht bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit vom Magnetfeld Plateaux in der Hallleitfähigkeit bei ganzzahligen Vielfachen von $\frac{e^2}{h}$ mit hoher Präzission auftreten. Im ersten Moment würde man argumentieren, dass ja zwischen Landau-Niveaus große Energie-Lücken liegen, so dass die Fermikante meist zwischen den Niveaus liegt und daher fast immer nur gefüllte Landau-Niveaus beitragen, was dann zu diesem Ergebnis führt. Aber die Erklärung ist falsch, denn die Zahl der Elektronen ist vorgegeben und damit auch die teilweise Füllung des obersten besetzten Landau-Niveaus.

Tatsächlich spielt eine Rolle, dass sich auf Grund von Unordnung die Elektronen in einem Zufallspotential bewegen. Um zu sehen, was passiert, wollen wir die folgende Geometrie betrachten. Wir nehmen an, die Elektronen können sich auf einem Zylinder bewegen. Wir bezeichnen die Koordinate in Richtung der Zylinderachse mit x und längs des Zylinderumfangs mit y. Durch den Zylinder geht ein magnetischer Fluss $\Phi_{\rm m}$, der in x-Richtung variiert und dadurch ein Magnetfeld senkrecht zum Zylinder-Mantel erlaubt. Weiterhin sei dieser Fluss zeitabhängig. Die zeitliche Veränderung induziert eine Spannung $\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_{\rm m}}{\partial t}$ längs des Umfangs. Das Vektorpotential ist dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_y(Bx + \frac{\Phi_{\rm m}}{L_y}) = \mathbf{e}_y(Bx - cE_y t), \tag{13.21}$$

wobei L_y der Zylinder-Umfang ist. damit hat man das zeitabhängige Problem für freie Elektronen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\rm i}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{eBx}{c} - E_y t\right)^2\right)\psi = {\rm i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{13.22}$$

mit der (partikulären) Lösung

$$\psi = {\rm e}^{{\rm i}(k_x x + k_y y - \epsilon t/\hbar)}\hat{\psi}(x - x_0(t)), \tag{13.23}$$

wobei $\hat{\psi}$ wieder die Wellenfunktion des harmonischen Oszillators ist und

$$x_0 = \frac{cEt}{B} - \frac{\hbar c k_y}{eB}, \quad \frac{\hbar k_x}{m} = \frac{cE}{B}, \quad \epsilon = \hbar\omega_{\rm c}(\nu + \frac{1}{2}) + \frac{c^2E^2}{2mB^2} \tag{13.24}$$

Die Wellenfunktionen verschieben sich in dieser Beschreibung mit der Geschwindigkeit cE/B in x-Richtung. Für freie Elektronen ergibt sich damit wieder die gleiche Geschwindigkeit und der gleiche Beitrag zur Hallleitfähigkeit.

Tatsächlich bewegen sich die Elektronen aber in einem Zufallspotential. Generell gilt für die Komponente P_y des mechanischen Impulses bei Änderung des magnetischen Flusses $\Phi_{\rm m}$ um $\Delta\Phi_{\rm m}$

$$\begin{aligned} P_y(\Delta\Phi_{\rm m}){\rm e}^{-\frac{{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y} &= \left(\frac{\hbar}{\rm i}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}(A_y + \frac{\Delta\Phi_{\rm m}}{L_y})\right){\rm e}^{-\frac{{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y} \\ &= {\rm e}^{\frac{-{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y}\left(\frac{\hbar}{\rm i}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}A_y\right) = {\rm e}^{\frac{-{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y}P_y(0). \end{aligned} \tag{13.25}$$

Damit folgt mit einem beliebigen Potential auf dem Zylinder aus

$$H(\Phi_{\rm m})\psi = \epsilon\psi \tag{13.26}$$

auch

$$H(\Phi_{\rm m} + \Delta\Phi_{\rm m}){\rm e}^{-\frac{{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y}\psi = \epsilon{\rm e}^{-\frac{{\rm i}e\Delta\Phi_{\rm m}}{\hbar c L_y}y}\psi. \tag{13.27}$$

Die Wellenfunktion muss längs des Zylinderumfangs periodisch sein. Dies ist für $\Delta\Phi_{\rm m} = \frac{hc}{e}$ erfüllt. Man erhält also bei Änderung von $\Phi_{\rm m}$ um ein halbes Flussquant bis auf eine Phase ${\rm e}^{-2\pi{\rm i}y/L_y}$ die gleichen Eigenfunktionen. Das heißt eine Veränderung von $\Phi_{\rm m}$ um hc/e bewirkt eine Abbildung Eigenfunktion $\to$ Eigenfunktion. Eigenfunktionen im ungeordneten Potential können bereits ohne äußere magnetischen oder elektrischen Felder lokalisiert oder ausgedehnt sein. Bei Anlegen des Magnetfeldes werden die lokalisierten Zustände sich wenig ändern. Bei Variation von $\Phi_{\rm m}$ werden sie sich in sich abbilden. Dagegen werden sich ausgedehnte im wesentlichen in x-Richtung bewegen. Bei vollständiger Besetzung der ausgedehnten Zustände innerhalb eines Landau-Niveaus wird bei Änderung von $\Phi_{\rm m}$ um hc/e sich eine ganze Zahl von Elektronen, in der Regel eins (man stelle sich an einer Stelle einen idealen Draht vor, der freie Elektronenbewegung erlaubt) durch den Querschnitt bewegen. Wenn daher die Fermikante außerhalb des Bereichs der ausgedehnten Zustände liegt, so erhält man in der Tat als

Hall-Leitfähigkeit die Anzahl der Landau-Niveaus, deren ausgedehnte Zustände besetzt sind, multipliziert mit e^2/h. Diese Größe wurde wegen ihrer hervorragenden Reproduzierbarkeit inzwischen als Leitwert-Normal eingeführt. Das Inverse wurde zu $h/e^2 = 25812.8\Omega_{\mathrm{K}}$ definiert, wobei der Index K für v. Klitzing steht. Die ausgedehnten Zustände liegen in der Regel in der Nähe des Landau-Niveaus ohne Störung, während die weiter entfernten Zustände lokalisiert sind. Geht daher die Fermi-Energie bei Variation des Magnetfeldes durch das Zentrum des Bandes mit den ausgedehnten Zuständen, dann verändert sich die Hallleitfähigkeit; in diesem Bereich erhält man auch einen Beitrag zur Parallel-Leitfähigkeit. Bewegt sich die Fermikante durch den Bereich der lokalisierten Zustände, dann nimmt die Hallleitfähigkeit ihren quantisierten Wert an und die Parallelleitfähigkeit verschwindet.

Ein topologische Argument, das auch für wechselwirkende Systeme gilt, wurde von Avron und Seiler, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 259 gegeben. Die Frage, wie sich die Landau-Niveaus aufspalten und welchen Beitrag diese zum quantisierten Halleffekt liefern, wird von Thouless, Kohmoto, Nightingale und den Nijs, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 405 gegeben.

13.c Gebrochenzahliger quantisierter Halleffekt

Entdeckung durch Tsui, Störmer und Gossard, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 496, Laughlin-Wellenfunktion Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1395.

Wir bestimmen zunächst nochmals die Wellenfunktionen des freien Elektronengases im starken Magnetfeld ohne elektrisches Feld. Wir verwenden die symmetrische Eichung $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x)$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2. \tag{13.28}$$

Wir führen nun die Koordinaten

$$(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}}(x, y) \tag{13.29}$$

ein, womit sich H in der Form

$$H = \frac{\hbar}{4}\omega_{\mathrm{c}}\left((\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_\xi - \eta)^2 + (\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_\eta + \xi)^2\right) = \frac{\hbar}{4}\omega_{\mathrm{c}}\left(-\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2 + \xi^2 + \eta^2 + 2\mathrm{i}(\eta\partial_\xi - \xi\partial_\eta)\right) \tag{13.30}$$

schreiben lässt und setzen schließlich

$$z = \xi - \mathrm{i}\eta, z^* = \xi + \mathrm{i}\eta, \tag{13.31}$$

woraus

$$\partial_\xi = \partial_z + \partial_{z^*}, \quad \partial_\eta = -\mathrm{i}\partial_z + \mathrm{i}\partial_{z^*} \tag{13.32}$$

mit

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_z z^* = 0, \quad \partial_{z^*} z = 0, \quad \partial_{z^*} z^* = 1. \tag{13.33}$$

folgt. Damit lässt sich der Hamilton-Operator in der Form

$$H = \hbar\omega_{\mathrm{c}}(-\partial_z + \frac{1}{2}z^*)(\partial_{z^*} + \frac{1}{2}z) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathrm{c}} \tag{13.34}$$

schreiben.

Für das unterste Landau-Niveau muss nun gelten

$$(\partial_{z^*} + \frac{1}{2}z)\psi(z, z^*) = 0. \tag{13.35}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \ln\psi}{\partial z^*} = -\frac{1}{2}z \tag{13.36}$$

mit der Lösung

$$\psi = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*}f(z), \tag{13.37}$$

wobei f eine beliebige holomorphe Funktion von z ist. Alle diese Wellenfunktionen gehören zum untersten Landau-Niveau mit $\epsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega_{\rm c}$. Die höheren Landau-Niveaus erhält man durch mehrfaches Anwenden des Aufsteige-Operators

$$\psi_\nu = (-\partial_z + \frac{1}{2}z^*)^\nu (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*} f(z)) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*}(-\partial_z + z^*)^\nu f(z) \tag{13.38}$$

mit Energie $\epsilon_\nu = \hbar\omega_{\rm c}(\nu + \frac{1}{2})$, da

$$[-\partial_z + \frac{1}{2}z^*, \partial_{z^*} + \frac{1}{2}z] = -1. \tag{13.39}$$

Ein Satz orthogonaler Eigenfunktionen im untersten Landau-Niveau kann damit in der Form

$$\psi_l = z^l \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*} \tag{13.40}$$

geschrieben werden. Laughlin hat nun für den gebrochenzahligen Quantenhall-Effekt die folgende Mehrteilchen-Wellenfunktion vorgeschlagen:

$$\psi(z_1, z_2, ..., z_N) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^m \prod_i \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_i z_i^*}. \tag{13.41}$$

Für $m = 1$ ist dies die Slater-Determinante = Vandermonde-Determinante

$$\begin{pmatrix} z_1^{N-1} & z_1^{N-2} & ... & z_1 & 1 \\ z_2^{N-1} & z_2^{N-2} & ... & z_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ z_{N-1}^{N-1} & z_{N-1}^{N-2} & ... & z_{N-1} & 1 \\ z_N^{N-1} & z_N^{N-2} & ... & z_N & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(z_i - z_j) \tag{13.42}$$

für alle Zustände bis $l = N - 1$. Man kann natürlich auf der linken Seite zur Potenz von z_i noch das jeweilige $\mathrm{e}^{-z_i z_i^*}$ multiplizieren und erhält dann die N-Teilchen-Wellenfunktion. Da die Elektronen Fermionen sind, muss die Wellenfunktion bei Vertauschung zweier Elektronen ihr Vorzeichen wechseln. Dies ist der Fall für ungerades m. Diese Laughlin-Zustände stellen eine sehr gute Näherung der Mehrteilchen-Wellenfunktion dar, da bei Annäherung zweier Elektronen die Wellenfunktion wie a^m verschwindet, wobei a der Abstand der Elektronen ist. Damit wird der gegenseitigen Abstoßung gut Rechnung getragen.

Wir entnehmen der Wellenfunktion, dass eine Besetzung bis $z^{m(N-1)}$ stattfindet. Das Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $(z^*z)^{mN}\mathrm{e}^{-z^*z}$ liegt bei $z^*z = m(N-1) \approx mN$, das heißt bei $x^2+y^2 = \frac{2\hbar c}{eB}mN$, was einer Kreisfläche $\frac{hc}{eB}mN$ entspricht. Die Maximalzahl von Elektronen auf dieser Fläche ist mN, das heißt der Füllfaktor definiert als die Anzahl der Elektronen N durch die maximal mögliche Elektronenzahl mN beträgt $1/m$. Die Hall-Leitfähigkeit ergibt sich dann zu $\sigma_{\rm H} = \frac{e^2}{hm}$, da nur der Bruchteil $1/m$ der Elektronen beiträgt. Es wurden $m = 3, 5, 7$ gefunden, aber auch andere Brüche mit ungeraden Nennern. Auf die Erklärung dieser Zustände können wir hier nicht eingehen.

Eine gute weiterführende Übersicht gibt 'The Quantum Hall Effect', Prange und Girvin (Herausgeber), Springer-Verlag 1987.

13.d Zyklotron-Bewegung

Wir können an dieser Stelle auf die Zyklotronbewegung eingehen und uns die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Elektron, $H\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ansehen. Eine (spezielle) Lösung lässt sich als Gaußsches Wellenpaket schreiben

$$\psi = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}z^2 - \frac{b}{2}z^{*2} - czz^* + \alpha^* z - \beta z^* + \mathrm{i}\phi} \tag{13.43}$$

Dabei wollen wir erlauben, dass α, β und ϕ von der Zeit abhängen. Die zeitliche Veränderung von α und β bewirkt eine Veränderung des Schwerpunkts des Wellenpakets und gibt damit seine Bewegung wieder. Im Prinzip könnten auch a, b und c von der Zeit abhängen. Dies würde eine Veränderung der

Breite des Wellenpakets beschreiben. Solche Bewegungen interessieren hier nicht. Wir wenden nun H und $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ auf ψ an und erhalten

$$(\partial_{z^*} + \frac{1}{2}z)\psi = (-bz^* - cz + \beta + \frac{1}{2}z)\psi \tag{13.44}$$

$$(-\partial_z + \frac{1}{2}z^*)(\partial_{z^*} + \frac{1}{2}z)\psi = \left((az + cz^* - \alpha^* + \frac{1}{2}z^*)(-bz^* - cz + \beta + \frac{1}{2}z) + c - \frac{1}{2}\right)\psi \tag{13.45}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (z\dot{\alpha}^* + z^*\dot{\beta} + \mathrm{i}\dot{\phi})\psi. \tag{13.46}$$

Damit folgt dann aus $H\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$\hbar\omega_{\mathrm{c}}\left((az + cz^* - \alpha^* + \frac{1}{2}z^*)(-bz^* - cz + \beta + \frac{1}{2}z) + c\right) = \mathrm{i}\hbar(z\dot{\alpha}^* + z^*\dot{\beta} + \mathrm{i}\dot{\phi}). \tag{13.47}$$

Die bilinearen Beiträge in z und z^* treten nur auf der linken Seite der Gleichung auf. Es muss daher gelten

$$(az + cz^* + \frac{1}{2}z^*)(-bz^* - cz + \frac{1}{2}z) = 0, \tag{13.48}$$

das heißt einer der beiden Faktoren muss verschwinden. Daher ist entweder $a = 0$, $c = -\frac{1}{2}$ oder $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$. Ein normierbares ψ erhält man nur für $c > 0$, da die Beiträge proportional zu z^2 und z^{*2} im Exponenten nicht in allen Richtungen y/x abfallen. Daher müssen wir die zweite Lösung $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$ verwenden. Der Koeffizient a ist unbestimmt. Damit die Funktion in allen Richtungen abfällt, muss $|a| < \frac{1}{2}$ gelten. Der Grenzfall $|a| = \frac{1}{2}$ ergibt in einer Richtung, die von der Phase von a abhängt (a muss nicht reell sein) abgesehen von einem Eichfaktor ebene Wellen, wie wir sie auch früher schon kennengelernt haben. Für das folgende wollen wir aber $a = 0$ wählen, was einen gleichmässigen Abfall des Wellenpakets in alle Richtungen ergibt

$$\psi = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^* + \alpha^* z - \beta z^* + \mathrm{i}\phi}. \tag{13.49}$$

Es bleibt nun für α, β und ϕ die Gleichung

$$\omega_{\mathrm{c}}\left((z^* - \alpha^*)\beta + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{i}\hbar(z\dot{\alpha}^* + z^*\dot{\beta} + \mathrm{i}\dot{\phi}) \tag{13.50}$$

oder aufgeteilt in die Koeffizienten von z, z^* und dem konstanten Term

$$\dot{\alpha}^* = 0, \quad \omega_{\mathrm{c}}\beta = \mathrm{i}\dot{\beta}, \quad \omega_{\mathrm{c}}(\frac{1}{2} - \alpha^*\beta) = -\dot{\phi} \tag{13.51}$$

zu lösen. Man findet

$$\alpha = \mathrm{const} = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t}, \quad \phi = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t - \alpha_0^*\beta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t} + \phi_0. \tag{13.52}$$

und

$$\psi = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^* + \alpha_0^* z - \beta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t}z^* - \mathrm{i}\alpha_0^*\beta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t + \mathrm{i}\phi_0}. \tag{13.53}$$

Wir zerlegen nun den Exponenten der Wellenfunktion in seinen Real- und Imaginärteil und finden

$$\psi = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\alpha-\beta)(z^*-\alpha^*-\beta^*) + \frac{1}{2}\mathrm{i}(z\alpha^* - z^*\alpha + z^*\beta - z\beta^* - \alpha^*\beta + \alpha\beta^* - \omega_{\mathrm{c}}t)}, \tag{13.54}$$

wobei wir $\frac{1}{2}(\alpha^*\alpha + \beta^*\beta)$ in den Imaginärteil von ϕ_0 absorbiert haben. Dieser Zerlegung entnehmen wir, dass der Schwerpunkt des Wellenpakets durch

$$z = \alpha + \beta = \alpha_0 + \beta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t} \tag{13.55}$$

gegeben ist. Dieser durchläuft also einen Kreis, dessen Mittelpunkt durch α_0 und dessen Radius (im ξ, η-Raum) durch $|\beta_0|$ gegeben ist, mit der Zyklotronfrequenz ω_{c}.