29 Renormierungs-Gruppe mit scharfem Abschneide-Impuls

29.a Ursprung der Renormierung

Das Problem der Renormierung trat zunächst in der Teilchenphysik auf. Es besteht darin, dass bei der störungstheoretischen Berechnung von Größen Integrale auftreten, die divergieren, und zwar um so stärker, je höher die Ordnung der Entwicklung ist. Was tun? Die Integrale divergieren meist bei großen Wellenvektoren. Führt man einen maximalen Wellenvektor ein, bis zu dem man integriert, so bleiben die Integrale endlich. Man weiß aber nicht, welchen maximalen Wellenvektor Λ man verwenden soll. Man verglich daher die Ergebnisse für verschiedene große Λ und fand, dass man bei geeignetem Umskalen verschiedener Größen und geeignetem Verändern von Kopplungen einen Limes $\Lambda \to \infty$ definieren kann, der endliche Ergebnisse für Größen von festen Wellenvektoren ergibt. Das Verfahren, das einem den Zusammenhang der Kopplungen und Skalen mit der Änderung des Abschneide-Impulses Λ ergibt, nennt man Renormierungsgruppe.

In der Festkörperphysik hat man dieses Problem in der Regel nicht. Man geht zum Beispiel von einem periodischen Gitter aus. Dann sind die Integrationen nur innerhalb der Brillouinzone auszuführen. Man hat einen natürlichen Abschneide-Impuls Λ. Trotzdem ist auch hier die Renormierungsgruppe bei den kritischen Phänomenen eingezogen. Der Grund liegt darin, dass sich dort das wesentliche Verhalten auf sehr großen Abständen abspielt oder entsprechen für Wellenvektoren $\mu \to 0$. Kritische Phänomene und die Teilchenphysik haben gemeinsam, dass man das Verhältnis Λ/μ gegen unendlich untersuchen muss. Daher müssen wir auch hier die Längenskala ändern und sind (zumindest bei einem scharfen Abschneiden) gezwungen, die Freiheitsgrade, die nach dem Umskalen Wellenvektoren größer Λ haben, auszuintegrieren und zu verfolgen, wie sich dadurch die effektive Wechselwirkung bei kleinen Wellenvektoren entwickelt.

29 Renormalization Group with Sharp Momentum Cut-off

29.a Origin of Renormalization

The problem of renormalization appeared initially in particle physics. It consists in the problem, that in a perturbative calculation of physical quantities integrals appear, which diverge, and the stronger the higher the order in the expansion is. What to do? Most often the integrals diverge at large momenta. If one introduces a maximum for the wave-vectors, then the integrals remain finite. It is not clear, what should be the maximal wave vector Λ. Comparing the results for different Λ one found, that an appropriate rescaling of various quantities and an appropriate change of the couplings allows one to define a limit $\Lambda \to \infty$, which yields finite results for quantities at fixed wave-vectors. The procedure which yields the connection between the couplings and scales and the change of the cut-off momentum Λ, is called renormalization group.

One usually does not have this problem in solid state physics. One starts for example from a periodic lattice. Then the integrals run over the Brillouin zone. Then one has a natural cut-off momentum Λ. But also here the renormalization group entered for critical phenomena. The reason is, that there the essential behaviour ranges over large distances and correspondingly for wave-vectors $\mu \to 0$. Critical phenomena and particle physics have in common that one has to investiagate the limit of the ratio Λ/μ approaching infinity. Thus also here the length scale has to be changed and we are forced (at least for a sharp cut-off) to integrate over the degrees of freedom which carry wave-vectors larger then Λ after rescaling and to follow how the effective interaction changes at small wave-vectors.

29.b Renormierung der Landau-Wechselwirkung

Wir wollen nun eine explizite Rechnung mit der Renormierungs-Gruppe durchführen. Wir gehen aus von einer Wechselwirkung der Form vom Landau-Typ (26.2)

29.b Renormalization of the Landau interaction

We will perform an explicit calculation of the renormalization group. We start from an interaction of Landau type (26.2)

$$H = \int \mathrm{d}^d r \left(\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{S}(\mathbf{r}))^2 + \frac{a_1}{2}\mathbf{S}(\mathbf{r})^2 - \mathbf{h}\mathbf{S}(\mathbf{r}) + \frac{a_2}{4}(\mathbf{S}(\mathbf{r})^2)^2 \right). \tag{29.1}$$

Diese Wechselwirkung haben wir gleich für das isotrope n-Vektormodell hingeschrieben. Das Feld unseres Ordnungsparameters hat also n Komponenten und die Wechselwirkung ist isotrop (bis auf den Term $\mathbf{hS}$, der für $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ eine Richtung auszeichnet).

We have written down this interaction for the isotropic n vector model. The field of our order parameter has n components and the interaction is isotropic (apart from the term $\mathbf{hS}$ which distinguishes a direction for $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$).

Wir führen zunächst die Skalentransformationen durch. Dies ergibt mit $\eta = 0$

First we perform a scale transformation. It yields with $\eta = 0$

$$H' = \int \mathrm{d}^d r' \left(\frac{1}{2}(\nabla' \mathbf{S}'(\mathbf{r}'))^2 + \frac{a_1}{2} b^2 \mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2 - \mathbf{h} b^{d/2+1} \mathbf{S}'(\mathbf{r}') + \frac{a_2}{4} b^{4-d} (\mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2)^2 \right), \tag{29.2}$$

wobei wir $\mathbf{r} = b\mathbf{r}'$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = b^{1-d/2}\mathbf{S}'(\mathbf{r}')$ substituiert haben. Wir lassen im Folgenden die Striche $'$ weg. Wir drücken die Wechselwirkung nun durch die Fourier-Komponenten

where we have substituted $\mathbf{r} = b\mathbf{r}'$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = b^{1-d/2}\mathbf{S}'(\mathbf{r}')$. In the following we omit the primes $'$. We express the interaction by the Fourier components

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V_\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{29.3}$$

aus und erhalten

and obtain

$$H' = \sum_{\mathbf{q}} \frac{q^2 + a_1 b^2}{2} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}} - \sqrt{V_\mathrm{P}} \mathbf{h} b^{d/2+1} \mathbf{S}_{\mathbf{0}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{4V_\mathrm{P}} \sum (\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1} \mathbf{S}_{\mathbf{q}_2})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}). \tag{29.4}$$

Wir gehen davon aus, dass die ursprüngliche Wechselwirkung H Fourier-Komponenten bis Λ enthielt. Auf Grund der Skalentransformation enthält die Wechselwirkung H' Fourier-Komponenten bis Λb. Wir müssen daher die Fourier-Komponenten zwischen Λ und Λb eliminieren. Wir müssen daher

We start out from the premise that the original interaction H contains Fourier components of the field up to the cut-off wave-vector Λ. The interaction H' contains due to the scale transformation Fourier components up to Λb. Thus we have to eliminate the Fourier components between Λ and Λb. Thus we have to integrate

$$\mathrm{e}^{-H_l} = \prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha} \left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha} \right) \mathrm{e}^{-H'} \tag{29.5}$$

ausintegrieren. Dabei numeriert der Index $_\alpha$ die n Komponenten von $\mathbf{S}$. Wir werten dieses Integral aus, indem wir uns fragen: Wie ändern sich die Koeffizienten a_1 und a_2 vor $\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2$ und $(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2)^2$? Diese Beiträge rühren her von

The index $_\alpha$ numerates the n components of $\mathbf{S}$. We evaluate the integral by asking: How do the coefficients a_1 and a_2 in front of $\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2$ and $(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2)^2$ change? These coefficients come from

$$\Delta H' = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (q^2 + b^2 a_1) \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{2V_\mathrm{P}} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}})(\mathbf{S}_{\mathbf{0}}^2) + \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{\mathbf{0}})(\mathbf{S}_{-\mathbf{q}} \mathbf{S}_{\mathbf{0}}). \tag{29.6}$$

Mit der Wahl $b = \mathrm{e}^l$, l infinitesimal, sind alle anderen Beiträge vernachlässigbar. Wir schreiben diese Wechselwirkung in der Form

With the choice $b = \mathrm{e}^l$, l infinitesimally, all other contributions are negligible. We write the interaction in the form

$$\Delta H' = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (q^2 + b^2 a_1) S_{\mathbf{q}\alpha} S_{-\mathbf{q}\beta} (\delta_{\alpha,\beta} + f_{\alpha,\beta}), \tag{29.7}$$

wobei

where

$$f_{\alpha\beta} = c'(\delta_{\alpha,\beta} \mathbf{S_0}^2 + 2 S_{\mathbf{0}\alpha} S_{\mathbf{0}\beta}), \quad c' = \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}(q^2 + b^2 a_1)}. \tag{29.8}$$

Nun ist

We have

$$\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q},1} \mathrm{d}S_{\mathbf{q},2} ... \mathrm{d}S_{\mathbf{q},n} \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},1} \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},2} ... \mathrm{d}S_{-\mathbf{q},n} \exp\left(-\sum_{\alpha\beta} (q^2 + b^2 a_1) S_{\mathbf{q}\alpha} S_{-\mathbf{q}\beta} (\delta_{\alpha,\beta} + f_{\alpha,\beta}) \right)$$
$$= \frac{\mathrm{const}}{(q^2 + b^2 a_1)^n \det(1+f)}, \tag{29.9}$$

was

which yields

$$\prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha} \left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha} \right) \exp(-\Delta H') = \mathrm{const} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f)) \tag{29.10}$$

ergibt. Wir entwickeln nun nach Potenzen von f

. We expand now in powers of f

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f) &= \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln(1 + \sum_\alpha f_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (f_{\alpha\alpha} f_{\beta\beta} - f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}) + ...) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} (\sum_\alpha f_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} + ...) \end{aligned} \tag{29.11}$$

Für infinitesimales l ergibt die Summe

The sum yields for infinitesimal l

$$\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} g(q) = V_\mathrm{P} l c g(\Lambda), \tag{29.12}$$

wobei c eine Konstante ist und sich c' auf

where c is a constant and c' reduces to

$$c' = \frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)} \tag{29.13}$$

reduziert. Damit haben wir dann

. Thus we have

$$\sum_\alpha f_{\alpha\alpha} = (n+2) \frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)} \mathbf{S_0}^2, \tag{29.14}$$

$$\sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = (n+8) \frac{a_2^2}{V_\mathrm{P}^2 (a_1 + \Lambda^2)^2} (\mathbf{S_0}^2)^2 \tag{29.15}$$

und damit schließlich den Beitrag der Eliminations-Prozedur

and thus finally the contribution to the eleimination procedure

$$\frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda} \ln\det(1+f) = \frac{1}{2}(n+2) \frac{lca_2}{a_1 + \Lambda^2} \mathbf{S_0}^2 - \frac{1}{4}(n+8) \frac{lca_2^2}{V_\mathrm{P}(a_1 + \Lambda^2)^2} (\mathbf{S_0}^2)^2. \tag{29.16}$$

Berücksichtigen wir die Änderung von a_1, a_2 und h nach (29.4) und (29.16), so erhalten wir die Differentialgleichungen

Considering the changes of a_1, a_2 and h according to (29.4) and (29.16) we obtain the differential equations

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{a_2 c(n+2)}{a_1+\Lambda^2}, \tag{29.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (4-d)a_2 - \frac{a_2^2 c(n+8)}{(a_1+\Lambda^2)^2}, \tag{29.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = (\frac{d}{2}+1)h. \tag{29.19}$$

29.c ϵ-Entwicklung

29.c ϵ expansion

Für den Fixpunkt muss nun gelten

For the fixed-point we have

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = 0. \tag{29.20}$$

Da die soeben durchgeführte Rechnung exakt ist für $a_2 = 0$, erwarten wir, dass sie eine gute Näherung für kleine a_2 darstellt. Auf Grund der Landau-Theorie erwarten wir, dass a_1 im kritischen Gebiet klein ist. Wir entwickeln daher die Gleichungen bis zur quadratischen Ordnung in den as,

Since the calculation we have performed is exact for $a_2 = 0$, we expect that it is a good approximation for small a_2. On the basis of the Landau theory we expect, that a_1 is small in the critical region. Thus we expand the equations up to second order in the as,

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{c}{\Lambda^2}(n+2)a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_1 a_2, \tag{29.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \epsilon a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+8)a_2^2, \tag{29.22}$$

wobei wir die Abkürzung

where we have introduced the abbreviation

$$\epsilon = 4 - d \tag{29.23}$$

eingeführt haben.

.

Wir finden dann
a) den trivialen Fixpunkt mit

Then we find
(i) the trivial fixed point with

$$a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad h^* = 0, \tag{29.24}$$

b) den nicht-trivialen Fixpunkt

(ii) the non-trivial fixed point

$$a_1^* = -\frac{\epsilon(n+2)\Lambda^2}{2(n+8)}, \quad a_2^* = \frac{\epsilon\Lambda^4}{c(n+8)}, \quad h^* = 0. \tag{29.25}$$

Diese Größen sind also für kleines ϵ tatsächlich klein. Linearisieren wir jetzt die Gleichungen um den Fixpunkt, so finden wir

These quantities are indeed small for small ϵ. If we linearize the equations around the fixed point we obtain

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = (2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_1 - a_1^*) + ...(a_2 - a_2^*), \tag{29.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (\epsilon - \frac{2c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_2 - a_2^*). \tag{29.27}$$

Daraus ergeben sich dann die Skalenexponenten für den trivialen Fixpunkt

From these equations we obtain the scaling exponents for the trivial fixed point

$$y_E = 2, \quad y_2 = \epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2} \tag{29.28}$$

und für den nicht-trivialen Fixpunkt zu

and for the non-trivial fixed point

$$y_E = 2 - \frac{n+2}{n+8}\epsilon, \quad y_2 = -\epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{29.29}$$

Für $d < 4$ hat der nicht-triviale Fixpunkt einen, der triviale Fixpunkt zwei relevante symmetrieerhaltende Operatoren. Daher erwartet man

For $d < 4$ the non-trivial fixed-point has one, the trivial fixed-point has two relevant symmetry conserving operators. Thus one expects for $d < 4$,

für $d < 4$, dass der nicht-triviale Fixpunkt das Verhalten in der Umgebung eines normalen kritischen Punktes beschreibt. Der triviale Fixpunkt beschreibt das trikritische Verhalten in drei Dimensionen.

that the non-trivial fixed point describes the behaviour in the vicinity of a normal critical point. The trivial fixed point describes the tricritical behaviour in three dimensions.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = 1. \tag{29.30}$$

Wir hatten anfangs $\eta = 0$ gesetzt. Natürlich ist diese Größe zunächst unbestimmt. Zu bestimmen ist sie aus dem Vorfaktor von $(\nabla\mathbf{S}(\mathbf{r}))^2$. In der Tat ist dieser Term der Hamilton-Funktion der einzige, der nicht klein ist. Er muss erhalten bleiben. Es stellt sich heraus, ohne dass wir das näher untersucht haben, dass η in erster Ordnung in ϵ gleich Null bleibt.

Initially we have put $\eta = 0$. Of course this quantity is initially undetermined. It has to be determined by the prefactor of $(\nabla\mathbf{S}(\mathbf{r}))^2$. This term is the only one in the hamiltonian which is not small. It must be conserved. It turns out, (we do not investigate this here) that η remains zero in first order in ϵ.

Es sei erwähnt, dass man bei der obigen Rechnung zum Beispiel eine kubische Anisotropie $\sum_\alpha S_\alpha^4(\mathbf{r})$ hinzufügen kann. Es ergibt sich dann ein interessantes Flussdiagram für a_2 und die neue Kopplung.

We mention that in the calculation above one can add a cubic anisotropy $\sum_\alpha S_\alpha^4(\mathbf{r})$. Then one obtains an interesting flow-diagram for a_2 and the new coupling.

29.d Ergebnisse für das isotrope n-Vektormodell

29.d Results for the isotropic n vector model

Was wir soeben betrachtet haben, ist der Anfang der ϵ-Entwicklung, das heißt einer Entwicklung der Exponenten in Potenzen von $\epsilon = 4 - d$. Die Terme in Ordnung ϵ haben wir gerade berechnet. Wir geben noch die Terme in Ordnung ϵ^2 an. Aus η und γ kann man die anderen Exponenten α, β, δ und ν aus (27.36) bis (27.39) berechnen. Der Exponent ω beschreibt die führende Korrektur zum Skalen, $\omega = (d - y_i)/y_E$ in (28.24)

What we have considered now, is the beginning of an ϵ expansion, that is an expansion of the exponents in powers of $\epsilon = 4 - d$. We have just calculated the terms in order ϵ. We give the terms in order ϵ^2. From η and γ one can calculate the other exponents α, β, δ and ν using (27.36) to (27.39). The exponent ω describes the leading correction to scaling, $\omega = (d - y_i)/y_E$ in (28.24)

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{29.31}$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{29.32}$$

$$\omega = \epsilon - \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \tag{29.33}$$

Wir beobachten, dass die Exponenten sowohl von der Dimension $4-\epsilon$ als auch von der Anzahl n der Komponenten des Ordnungsparameters $\mathbf{m} = \langle\mathbf{S}\rangle$ abhängen. Systeme, die durch ein und denselben Fixpunkt beschrieben werden, haben gleiche kritische Exponenten. Man sagt, sie gehören zur gleichen Universalitätsklasse. Konventionelle kritische und trikritische Phasenübergänge gehören zu verschiedenen Universalitätsklassen. Systeme mit der langreichweitigen Dipol-Wechselwirkung werden durch eine weitere Universalitätsklasse beschrieben.

Stanley hat gezeigt, dass das n-Vektormodell im Limes $n \to \infty$ durch das sphärische Modell beschrieben wird. Für dieses erhält man im Bereich $2 < d \leq= 4$ die Exponenten $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$. Ausgehend von diesem Limes gibt es eine $1/n$-Entwicklung. Für $d = 3$ Raumdimensionen ergibt diese

We observe that the exponents depend both on the dimension $4-\epsilon$ and on the number n of components of the order parameter $\mathbf{m} = \langle\mathbf{S}\rangle$. Systems which are described by one and the same fixed point have the same critical exponents. One says, they belong to the same universality class. Conventional critical and tricritical phase transitions belong to different universality classes. Systems with long-range dipolar interaction are described by another universality class.

Stanley has shown, that the n-vector model is described by the sperical model in the limit $n \to \infty$. For this one obtains in the region $2 < d \leq= 4$ the exponents $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$. Starting from this limit one has a $1/n$ expansion. It yields for $d = 3$ space dimensions

$$\eta = \frac{8}{3\pi^2 n} + O(\frac{1}{n^2}), \tag{29.34}$$

$$\gamma = 2 - \frac{24}{\pi^2 n} + O(\frac{1}{n^2}). \tag{29.35}$$

Schließlich haben Mermin und Wagner gezeigt, dass es für $n \geq 2$ keine spontane Magnetisierung bei endlichen Temperaturen in $d = 2$ Dimensionen gibt. Für $n > 2$ gibt es die folgende Entwicklung in $\epsilon' = d - 2$

Finally Mermin and Wagner have shown, that for $n \geq 2$ there is no spontaneous magnetization in $d = 2$ dimensions at finite temperatures. For $n > 2$ there is the following expansion in $\epsilon' = d - 2$

$$\eta = \frac{\epsilon'}{n-2} + O(\epsilon'^2), \tag{29.36}$$

$$\nu = \frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{n-2} + \frac{4-n}{2(n-2)^2}\epsilon' + O(\epsilon'^2). \tag{29.37}$$

Man kann auch zeigen, dass sich das System mit $n = -2$ formal weitgehend wechselwirkungsfrei verhält, woraus $\eta = 0$, $\gamma = 1$ unabhängig von der Dimension folgt. Jedoch ist keine Entwicklung in $n + 2$ bekannt. Man kann ein n, d-Diagramm mit Höhenlinien für Exponenten zeichnen. Für α und γ finden sie sich in F.W., Lecture Notes in Physics 54 (1976) 1-29 (Springer).

Viele Daten sind in J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Oxford Science Publications zu finden.

It can be shown that the system with $n = -2$ is formally largely interaction-free so that one obtains $\eta = 0$, $\gamma = 1$ independent of the dimensionality. Hoever, there is no expansion known in $n + 2$. One can draw the lines of constant exponents in an n, d diagram. For α and γ it can be found in F.W., Lecture Notes in Physics 54 (1976) 1-29 (Springer).

Many data can be found in J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Oxford Science Publications.