28 Renormierungsgruppe

28.a Grundidee

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt ein intuitives Bild für die Homogenitätsgesetze entwickelt. In diesem Abschnitt wollen wir es mit Renormierungsgruppenideen begründen. Die Beobachtung, dass die Korrelationsfunktion am kritischen Punkt skaleninvariant ist, lässt vermuten, dass auch die effektive Wechselwirkung am kritischen Punkt diese Eigenschaft hat. Wir nennen die Prozedur, die die Skala der Wechselwirkung verändert, Renormierungsgruppe (RG). Wir bezeichnen die Hamilton-Funktion mit $\mathcal{H}$ und führen das dimensionslose

28 Renormalization Group

28.a Basic Idea

We developed an intuitive picture for the homogeneity laws in the preceeding section. In this section we will establish it with renormalization group ideas. The observation, that the correlation functions are scale invariant at the critical point, permits us to conjecture, that the effective interaction has the corresponding property at the critical point. We call the procedure which changes the scale of the interaction renormalization group (RG). We denote the Hamilton function by $\mathcal{H}$ and introduce the dimensionless

$$H = \mathcal{H}/(k_{\rm B}T), \tag{28.1}$$

das im Integral für die Zustandssumme auftritt, das wir in Zukunft als Hamilton-Funktion bezeichnen. Die Dichte der freien Energie ist definiert als

which appears in the integral for the partion function, which from now on we call Hamilton function. The density of the free energy is defined as

$$-F = \frac{1}{V_{\rm P}} \ln \operatorname{tr} \exp(-H). \tag{28.2}$$

Die Renormierungsgruppen-Transformation besteht nun aus zwei Schritten
a) einer Änderung der Längenskala um einen Faktor $b = \mathrm{e}^l$ in allen linearen Dimensionen. Wir lassen dabei die Zustandssumme $Z = \ln \operatorname{tr} \exp(-H)$ invariant. Da das Volumen um den Faktor e^{dl} schrumpft, gilt für die Dichten F

The renomalization group transformation consists of two steps
(i) a change in length scale by a factor $b = \mathrm{e}^l$ in all linear dimensions. By doing this we leave the partition function $Z = \ln \operatorname{tr} \exp(-H)$ invariant. Since the volume shrinks by the factor e^{dl}, we obtain for the density

$$F_0 = \mathrm{e}^{-dl} F_l. \tag{28.3}$$

b) einer Elimination und/oder Transformation der Freiheitsgrade S, die die freie Energie invariant lässt.

Der zweite Schritt ist notwendig, um einen Hamilton-Operator zu erhalten, der mit dem ursprünglichen verglichen werden kann. Die Dichte der Freiheitsgrade S muss auf die ursprüngliche reduziert werden durch das Ausdünnen der Freiheitsgrade, die Fluktuationen kurzer Wellenlängen beschreiben (Fourier-Komponenten mit großen Wellenvektoren). Zum anderen muss das System erweitert werden auf eines mit dem Volumen des ursprünglichen. Dann gibt es eine eins-zu-eins-Entsprechung der ursprünglichen und der neuen Variablen.

(ii) the elimination and/or the transformation of the degrees of freedom S, which leaves the free energy invariant.

The second step is necessary, in order to obtain a Hamiltonian which can be compared with the original one. The density of the degrees of freedom S has to be reduced to the original one by thinning out the degrees of freedom, which describe fluctuations at short wave-lengths (Fourier components with large wave-vectors). On the other hand the system has to be extended to one with the same volume as the original one. Then there is a one-to-one correspondence between the original and the new variables.

Wenn wir unser System unter dem Mikroskop betrachten, beobachten wir unter geringerer Vergrösserung weniger Details, was dem Eliminations-Prozess entspricht. Andererseits beobachten wir dann ein größeres Volumen, was der Erweiterung des Volumens entspricht.

If we consider our system under a microscope, then we observe at weak magnification less details, which corresponds to the elimination process. On the other hand we observe a larger volume which corresponds to the extension of the volume.

Die vollständige RG-Transformation von H_0 nach H_l schreiben wir

The complete RG transformation from H_0 to H_l can be written

$$H_l = R_l(H_0), \quad F(H_0) = \mathrm{e}^{-dl} F(H_l). \tag{28.4}$$

In vielen Fällen ist es möglich, die RG-Prozedur für infinitesimales l zu formulieren. Dann kann die erste Gleichung (28.4) in differentieller Form geschrieben werden

In many cases it is possible to formulate the RG-procedure for infinitesimal l. Then the first equation (28.4) can be written in differential form

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}l} = \mathcal{G}H, \tag{28.5}$$

wobei $\mathcal{G}$ der Generator der Renormierungsgruppe ist. Im allgemeinen wirkt $\mathcal{G}$ nichtlinear auf H.

where $\mathcal{G}$ is the generator of the renormalization group. In general $\mathcal{G}$ acts non-linearly on H.

28.b Fixpunkt, Klassifizierung von Operatoren

28.b Fixed point, classification of operators

Nun machen wir zwei Annahmen:
a) Wir nehmen an, dass es eine Fixpunkt-Hamilton-Funktion H^* gibt,

Now we make two assumptions:
(i) We assume that there is a fixed point Hamiltonian H^*,

$$\mathcal{G}H^* = 0. \tag{28.6}$$

H^* ist eine Hamilton-Funktion, die sich auf sich selbst abbildet.

H^* is a Hamiltonian which maps into itself.

b) Wir nehmen an, dass eine kritische Hamilton-Funktion gegen H^* konvergiert.

(ii) We assume that a critical Hamiltonian converges towards H^*.

$$\lim_{l\to\infty} H_l = H^*. \tag{28.7}$$

Dies ist eine wesentlich schwächere Bedingung als die Forderung, die kritische Hamilton-Funktion H_0 sei H^*. Die Bedingung (28.7) verlangt nur, dass die effektive Wechselwirkung unter der Renormierungsgruppe gegen einen Fixpunkt konvergiert.

This condition is essentially weaker the the requirement the critical Hamiltonian H_0 be H^*. The condition (28.7) requires only, that the effective interaction converges towards the fixed point under the action of the renormalization group.

Um nun das kritische Verhalten zu untersuchen zerlegen wir den Generator $\mathcal{G}$ in den Anteil $\mathcal{L}$ linear in ΔH und den Beitrag $\mathcal{Q}$ in höherer Ordnung in ΔH,

In order to investigate the critical behaviour we separate the generator $\mathcal{G}$ into a a contribution $\mathcal{L}$ linear in ΔH and the contribution $\mathcal{Q}$ in higher order in ΔH,

$$\mathcal{G}(H^* + \Delta H) = \mathcal{L}\Delta H + \mathcal{Q}(\Delta H). \tag{28.8}$$

Es gilt also $\mathcal{Q}(\Delta H) = O(\Delta H)^2$. Wir definieren nun Eigen-Operatoren (Eigen-Funktionen)

Thus $\mathcal{Q}(\Delta H) = O(\Delta H)^2$ holds. Now we define the eigen operators (eigen functions)

$$\mathcal{L}O_i = y_i O_i \tag{28.9}$$

und nehmen im Folgenden an, dass die Eigen-Operatoren einen kompletten Satz von Operatoren bilden, so dass jede Hamilton-Funktion (jeder Hamilton-Operator) H_0 entwickelt werden kann als

and assume in the following that the eigen operators constitute a complete set of operators so that any Hamiltonian H_0 can be expanded as

$$H_0 = H^* + \sum_i \mu_i O_i. \tag{28.10}$$

Dann erhalten wir in linearer Ordnung in μ

then we obtain in linear order in μ

$$H_l = H^* + \sum_i \mu_i \mathrm{e}^{y_i l} O_i. \tag{28.11}$$

Je nach Eigenwert y unterscheidet man

Dependimg on the eigenvalue y one distinguishes

$$\begin{array}{ll} y > 0 & \text{relevante Operatoren / relavant operators} \\ y = 0 & \text{marginale Operatoren / marginal operators} \\ y < 0 & \text{irrelevante Operatoren / irrelavant operators.} \end{array} \tag{28.12}$$

Der Gleichung (28.11) entnimmt man unmittelbar, dass am kritischen Punkt die Felder (in der Feldtheorie Quellen) μ_i aller relevanten Operatoren verschwinden müssen.

We gather immediately from eq. (28.11) that all fields (in field theory sources) μ_i of relevant operators have to vanish.

Marginale Operatoren können als relevante oder irrelevante Operatoren agieren. Dies hängt davon ab, ob die nichtlinearen Terme μ_i nach Null oder von Null wegtreiben. Es gibt auch den seltenen Fall, dass ein marginaler Operator eine Linie von Fixpunkten erzeugt wie beim zweidimensionalen Acht-Vertex-Modell.

Marginal operators may act as relevant or irrelevant operators, depending on whether the nonlinear terms carry μ_i to zero or away from zero. There is also the rare case, where a marginal operator generates a line of fixed points like in the two-dimensional eight-vertex model.

Es gibt einen speziellen Operator, den konstanten (das heißt den von S unabhängigen) Beitrag $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$, für den formal

There is a special operator, the constant (that is independent of S) contribution $\mu_0 V_{\mathrm{P}}$, for wich formally

$$O_0 = V_{\mathrm{P}}, \quad y_0 = d \tag{28.13}$$

gilt, da das Volumen V_{P} um einen Faktor e^{-dl} schrumpft, was durch ein Anwachsen von μ_0 um einen Faktor e^{dl} kompensiert wird. Das Hinzufügen einer Konstanten ändert am kritischen Verhalten jedoch nichts. Er ist der Ursprung des regulären Anteils der freien Energie.

holds, since the volume V_{P} shrinks by a factor e^{-dl}, which is compensated by an increase of μ_0 by a factor e^{dl}. However, the addition of a constant does not change the critical behaviour. It is the source of the regular part of the free energy.

Die Art des kritischen Verhaltens hängt von der Anzahl der symmetrie-erhaltenden relevanten Operatoren ab. (Symmetrie-erhaltend bedeutet, dass die Symmetrie des Hamilton-Operators erhalten bleibt; eine spontan gebrochene Symmetrie des Systems wird dadurch nicht ausgeschlossen.) Entwickeln wir

The type of critical behaviour depends on the number of symmetry conserving relevant operators. (Symmetry conserving means that the symmetry of the hamiltonian is conserved under addition of such an operator; spontaneous symmetry breaking of the system is not excluded.) If we expand

$$\mathcal{H} = \sum_i \mu_i^0 O_i, \quad H^* = \sum \mu_i^* O_i, \tag{28.14}$$

so erhalten wir

then we obtain

$$\mu_i = \beta \mu_i^0 - \mu_i^*. \tag{28.15}$$

Für einen normalen kritischen Punkt hat man einen relevanten symmetrie-erhaltenden Operator (außer O_0) O_E, der die kritische Temperatur bestimmt

One has one relevant symmetry-conserving operator (apart from O_0) O_E, which determines the critical temperature

$$\mu_E \equiv \tau = \beta\mu_E^0 - \mu_E^* = (\beta - \beta_\mathrm{c})\mu_E^0, \quad \beta_\mathrm{c} = \frac{\mu_E^*}{\mu_E^0}. \tag{28.16}$$

Grob gesprochen ist O_E proportional zu H abzüglich Erwartungswert am kritischen Punkt. An einem trikritischen Punkt hat man zwei relevante symmetrie-erhaltende Operatoren (außer O_0) und folglich zwei Bedingungen für kritisches Verhalten.

Roughly speaking O_E is proportional to H minus its expectation value at the critical point. At a tricritical point one has two relevant symmetry conserving operators (besides O_0) and consequently two conditions for criticality.

Die RG-Prozedur ist nicht eindeutig definiert. Dies hat eine Anzahl von Folgerungen, die wir hier nur aufzählen (F.W., J. Physics C7 (1974) 2098): H^* hängt von der RG-Transformation ab. Variiert man die RG-Transformation infinitesimal, dann ändert sich H^* um Operatoren, die wir redundant nennen. Formal hängen die Exponenten y der redundanten Operatoren von der Wahl der RG ab, aber die redundanten Operatoren tragen nicht zur freien Energie bei. Daher haben die Exponenten der redundanten Operatoren keine physikalische Bedeutung. Die Exponenten der anderen Operatoren sind invariant gegen infinitesimale Variationen der RG-Gleichungen. Redundante Operatoren können in numerischen Rechnungen recht störend sein, wenn sie formal Eigenwerte $y > 0$ haben. Sie haben nur kurzreichweitige Korrelationen.

The RG procedure is not uniquely defined. This has a number of consequences which we here only enumerate (F.W., J. Physics C7 (1974) 2098): H^* depends on the RG transformation. If one varies the RG transformation infinitesimally, then H^* changes by operators, which we call redundant. The exponents y of the redundant operators depend formally on the choice of the RG, but the redundant operators do not contribute to the free energy. Thus the exponents of the redundant operators do not have a physical meaning. The exponents of the other operators are invariant against infinitesimal variations of the RG equations. Redundant operators can be perturbing in numerical calculations, if they have formally eigenvalues $y > 0$. They have only short-range correlations.

28.c Skalen der freien Energie

28.c Scaling of the free energy

Nehmen wir an, es reiche aus, nur zwei Operatoren, O_E und den Operator des Ordnungs-Parameters O_h zu berücksichtigen,

Let us assume, it is sufficient to take into account only the two operators, O_E and the operator of the order parameter O_h,

$$H_0 = H^* + \tau O_E + hO_h, \tag{28.17}$$

was mit

which with

$$H_l = H^* + \tau \mathrm{e}^{y_E l} O_E + h\mathrm{e}^{y_h l} O_h \tag{28.18}$$

dann

yields

$$F(\tau, h) = \mathrm{e}^{-dl} F(\tau \mathrm{e}^{y_E l}, h\mathrm{e}^{y_h l}) \tag{28.19}$$

ergibt. Dies stimmt mit $L = \mathrm{e}^l$ mit der Gleichung für den singulären Anteil der freien Energie (27.31) unseres intuitiven Bilds überein.

. This agrees with $L = \mathrm{e}^l$ with the equation for the singular part of the free energy (27.31) of our intuitive picture.

Normalerweise hat man eine unendliche Anzahl von Störungen $\mu_i O_i$ in Gleichung (28.10). Um ihren Effekt auf das Homogenitätsgesetz zu betrachten, fügen wir wenigstens einen hinzu,

Normally one has an infinite number of perturbations $\mu_i O_i$ in equation (28.10). In order to observe their effect on the homogeneity law, we add at least one of them,

$$H_0 = H^* + \tau O_E + hO_h + \mu_i O_i \tag{28.20}$$

und erhalten

and obtain

$$H_l = H^* + \tau e^{y_E l} O_E + h e^{y_h l} O_h + \mu_i e^{y_i l} O_i, \tag{28.21}$$

$$F(\tau, h, \mu_i) = |\tau|^{d/y_E} F(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, \frac{\mu_i}{|\tau|^{y_i/y_E}}). \tag{28.22}$$

Wir interessieren uns für das kritische Verhalten, das heißt den Limes $\tau \to 0$

We are now interested in the critical behaviour, that is in the limit $\tau \to 0$

$$\lim \frac{\mu_i}{|\tau|^{y_i/y_E}} = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & y_i < 0 \text{ oder } \mu_i = 0 \\ \pm\infty & y_i > 0 \text{ und } \mu_i \neq 0. \end{array} \right. \tag{28.23}$$

Falls O_i relevant ist, ($y_i > 0$), dann muss μ_i explizit berücksichtigt werden. Für irrelevante Operatoren kann der Term $\mu_i/|\tau|^{y_i/y_E}$ vernachlässigt werden, wenn F nach Potenzen von μ_i entwickelt werden kann. Man beachte, dass die rechte Seite von (28.21) die freie Energie weit entfernt vom kritischen Punkt enthält. Der irrelevante Operator führt zu einer Korrektur zum Skalen-Verhalten

If O_i is relevant, ($y_i > 0$), then μ_i has to be taken into account explicitely. For irrelevant operators the term $\mu_i/|\tau|^{y_i/y_E}$ can be neglected, if F can be expanded in powers of μ_i. Note, that the right hand side of (28.21) contains the free energy far away from the critical point. The irrelevant operator yields a correction to the scaling behaviour

$$F = |\tau|^{d/y_E} F(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, 0) + \mu_i |\tau|^{(d-y_i)/y_E} F'(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}, 0) + ... \tag{28.24}$$

Solch eine Korrektur wurde im superfluiden Helium gefunden (G. Ahlers, Phys. Rev. A8 (1973) 530).

Such a correction has been found in superfluid helium (G. Ahlers, Phys. Rev. A8 (1973) 530).

28.d Korrelationen

28.d Correlations

Bisher haben wir nur translationsinvariante Operatoren betrachtet. Wir können auch die Eigenwertgleichung für einen lokalen Operator $\tilde{O}_i$ betrachten

Until now we considered only translational invariant operators. We may also consider the eigen value equation for local operators $\tilde{O}_i$

$$\mathcal{L}\tilde{O}_i = -x_i \tilde{O}_i. \tag{28.25}$$

Dann ergibt sich in linearer Näherung aus

Then one obtains in linear approximation from

$$H_0 = H^* + \lambda_i \tilde{O}_i \tag{28.26}$$

die Hamilton-Funktion

the Hamiltonian

$$H_l = H^* + \lambda_i e^{-x_i l} \tilde{O}_i. \tag{28.27}$$

An Stelle von $\tilde{O}_i$, das eine Funktion der $S(\mathbf{r}')$ ist, können wir $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ betrachten, das wir erhalten, indem wir $S(\mathbf{r}')$ durch $S(\mathbf{r}' + \mathbf{r})$ ersetzen. Dieser Operator $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ wirkt in der Umgebung von $\mathbf{r}$. Aus

Instead of $\tilde{O}_i$, which is a function of the $S(\mathbf{r}')$, we may consider $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$, which we obtain by replacing $S(\mathbf{r}')$ by $S(\mathbf{r}'+\mathbf{r})$. This operator $\tilde{O}_i(\mathbf{r})$ acts in the vicinity of $\mathbf{r}$. From

$$H_0 = H^* + \lambda_i \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{28.28}$$

folgt dann

we obtain

$$H_l = H^* + \lambda_i e^{-x_i l} \tilde{O}_i(\mathbf{r} e^{-l}), \tag{28.29}$$

da die Längenskala unter der RG-Transformation um den Faktor e^{-l} schrumpft.

since the length scale shrinks under the RG transformation by the factor e^{-l}.

Wir können nun die Exponenten x_i und y_i durch Einführen des translationsinvarianten Operators

We may now connect the exponents x_i and y_i by introducing the translational invariant operator

$$O_i = \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{28.30}$$

miteinander verknüpfen. Wir erhalten dann aus

. Then

$$H_0 = H^* + \mu_i O_i = H^* + \mu_i \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}) \tag{28.31}$$

die Hamilton-Funktion

yields the hamiltonian

$$\begin{aligned} H_l &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{-x_i l} \int \mathrm{d}^d r \tilde{O}_i(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}) \\ &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{(d-x_i)l} \int \mathrm{d}^d(r\mathrm{e}^{-l}) \tilde{O}_i(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}) \\ &= H^* + \mu_i \mathrm{e}^{(d-x_i)l} O_i. \end{aligned} \tag{28.32}$$

Der Vergleich mit (28.11) ergibt

Comparison with (28.11) yields

$$y_i = d - x_i, \tag{28.33}$$

es sei denn das Integral verschwindet, was passiert, wenn man den Gradienten eines Operators $\tilde{O}_i$ betrachtet. Man überzeugt sich in diesem Fall leicht, dass aus (28.29)

unless the integral vanishes which happens if we consider the gradient of an operator $\tilde{O}_i$. In this case one easily sees that one obtains

$$\mathcal{L}\nabla\tilde{O}_i = -(x_i + 1)\nabla\tilde{O}_i \tag{28.34}$$

folgt.

from (28.29).

Aus einem Hamilton-Operator

Starting from the hamiltonian

$$H_0 = H^* + \tau O_E + h O_h + \lambda_1 \tilde{O}_h(\mathbf{0}) + \lambda_2 \tilde{O}_h(\mathbf{r}) \tag{28.35}$$

folgt dann

we obtain

$$H_l = H^* + \tau \mathrm{e}^{y_E l} O_E + h \mathrm{e}^{y_h l} O_h + \lambda_1 \mathrm{e}^{(y_h - d)l} \tilde{O}_h(\mathbf{0}) + \lambda_2 \mathrm{e}^{(y_h - d)l} \tilde{O}_h(\mathbf{r}\mathrm{e}^{-l}). \tag{28.36}$$

Differenzieren wir die zugehörige freie Energie (diesmal nicht die Dichte), so erhalten wir die Korrelationsfunktion

If we differentiate the corresponding free energy (this time not the density), then we obtain the correlation function

$$G(\mathbf{r}, \tau, h) = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} (V_0 F(H_0))|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \tag{28.37}$$

Da die freie Energie unter der Renormierungsgruppe erhalten bleibt, $V_0 F(H_0) = V_l F(H_l)$, folgt

Since the free energy is conserved under the renormalization group, $V_0 F(H_0) = V_l F(H_l)$, we obtain

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \tau, h) &= -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} (V_l F(H_l))|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \\ &= \mathrm{e}^{2(y_h - d)l} G(r\mathrm{e}^{-l}, \tau \mathrm{e}^{y_E l}, h \mathrm{e}^{y_h l}), \end{aligned} \tag{28.38}$$

womit dann auch (27.27) hergeleitet ist.

so that also (27.27) has been derived.

28.e Nichtlineare Beiträge

Bisher haben wir angenommen, dass wir nur den linearen Term $\mathcal{L}$ des Generators $\mathcal{G}$ zu berücksichtigen brauchen. Wir wollen nun betrachten, was nicht-lineare Terme bewirken. Dazu nehmen wir auch Beiträge zweiter Ordnung in $\mathcal{G}$ mit und erhalten die Gleichungen

28.e Non-linear contributions

Until now we have assumed, that only the linear term $\mathcal{L}$ of the generator $\mathcal{G}$ has to be taken into account. Now we will consider what the non-linear terms bring about. For this purpose we take the terms in second order in $\mathcal{G}$ into account and obtain the equations

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}l} = y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3) \tag{28.39}$$

28.e.α Nichtlineare Skalenfelder

Wir können nun nicht-lineare Skalenfelder g_i einführen, die exakt

28.e.α Non-linear scaling fields

Now we may introduce non-linear scaling fields g_i, which obey exactly

$$\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}l} = y_i g_i \tag{28.40}$$

genügen sollen, wobei auch diese nach den μ entwickelt werden,

where these have to be expanded in the μs,

$$g_i = \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} b_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3). \tag{28.41}$$

Setzen wir nun (28.41) in (28.40) ein, so folgt

Substituting (28.41) into (28.40) we obtain

$$y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{i,j,k}\mu_j\mu_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k}(y_j + y_k)b_{i,j,k}\mu_j\mu_k = y_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} y_i b_{i,j,k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3), \tag{28.42}$$

was mit

which is solved by

$$b_{i,j,k} = \frac{a_{i,j,k}}{y_i - y_j - y_k} \tag{28.43}$$

gelöst wird. Solange also jeweils $y_i \neq y_j + y_k$ (und entsprechende Ungleichungen für Terme in höherer Ordnung in μ), kann man diese Skalenfelder g einführen. Für diese gilt exakt

. As long as $y_i \neq y_j + y_k$ (and similar inequalities for terms in higher order in μ), one can introduce these scaling fields g. For these one obtains exactly

$$F(\ldots g_i \ldots) = \mathrm{e}^{-dl} F(\ldots g_i \mathrm{e}^{y_i l} \ldots). \tag{28.44}$$

28.e.β Regulärer Anteil der freien Energie

Addiert man eine Konstante zur Wechselwirkung, so ändert diese nur μ_0 im Beitrag $\mu_0 V_\mathrm{P}$ in Gleichung (28.13). Sie wirkt sich aber nicht auf die anderen μ aus. Daher gilt

28.e.β Regular part of the free energy

If one adds a constant to the interaction, then this changes only μ_0 in the contribution $\mu_0 V_\mathrm{P}$ in equation (28.13). It does not effect the other μs. Thus one has

$$F(g_0 \ldots g_i \ldots) = g_0 + F(0 \ldots g_i \ldots). \tag{28.45}$$

Der reguläre Term der freien Energie ist nun

The regular term in the free energy is

$$F_\mathrm{reg} = g_0 = \mu_0 + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{a_{0,j,k}}{d - y_j - y_k}\mu_j\mu_k + O(\mu^3), \tag{28.46}$$

während der zweite Beitrag in (28.45) der singuläre Beitrag ist. Der reguläre Beitrag wird in der Regel einen Beitrag proportional τ^2 enthalten, der dann einen Untergrund zur spezifischen Wärme liefert.

whereas the second contribution in (28.45) is the singular contribution. Normally the regular contribution will contain a contribution proportional to τ^2, which yields a background to the specific heat.

28.e.γ Logarithmische spezifische Wärme

28.e.γ Logarithmic specific heat

Falls der kritische Exponent der spezifischen Wärme verschwindet, $\alpha = 0$, folgt aus (27.35) $2y_E = d$. In diesem Fall kann das Skalenfeld g_0 nicht so einen einfachen Term proportional τ^2 haben, da der Nenner in (28.43) verschwindet. Beschränken wir uns auf das Gleichungssystem

If the critical exponent of the specific heat vanishes, $\alpha = 0$, then (27.35) yields $2y_E = d$. In this case the scaling field g_0 will not simply have a term proportional τ^2, since the denominator in (28.43) vanishes. Restricting us to the system of equations

$$\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}l} = d\mu_0 + \frac{1}{2}a_{0,E,E}\tau^2, \quad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = y_E\tau, \tag{28.47}$$

so folgt

then we obtain

$$g_0 = \mu_0 - \frac{1}{2}a_{0,E,E}(l-l_0)\tau^2, \quad g_E = \tau. \tag{28.48}$$

Dabei ist l_0 eine Integrationskonstante. Wir können nun, da g_E mit $\mathrm{e}^{dl/2}$ anwächst, $l - l_0 = \frac{2}{d}\ln|g_E| = \frac{2}{d}\ln|\tau|$ schreiben und finden schließlich

Here l_0 is a constant of integration. Since g_E increases like $\mathrm{e}^{dl/2}$, we may write $l-l_0 = \frac{2}{d}\ln|g_E| = \frac{2}{d}\ln|\tau|$ and obtain finally

$$g_0 = \mu_0 - \frac{1}{d}a_{0,E,E}\tau^2\ln|\tau|, \quad g_E = \tau. \tag{28.49}$$

Jetzt steckt in dem bisher regulären g_0 die logarithmische Singularität, während der singuläre Anteil $\tau^2 F_{\mathrm{sing}}(\tau = \pm 1)$ einen Sprung in der spezifischen Wärme enthalten kann. Eine logarithmische Singularität der spezifischen Wärme tritt im zweidimensionalen Ising-Modell auf (Onsager). Im Acht-Vertex-Modell (Baxter) findet man logarithmische Singularitäten der Form $(T - T_\mathrm{c})^n \ln|T - T_\mathrm{c}|$ für gerade n. Die hier gegebene Erklärung findet sich bereits bei Widom und bei Kadanoff.

In g_0, which was until now regular, a logarithmic singularity has been plugged in, whereas the singular part $\tau^2 F_{\mathrm{sing}}(\tau = \pm 1)$ may contain a jump in the specific heat. A logarithmic singularity in the specific heat appears in the two-dimensional Ising model (Onsager). In the eight-vertex model (Baxter) a logarithmic singularity of the form $(T - T_\mathrm{c})^n \ln|T - T_\mathrm{c}|$ is found for even n. This explanation was already given by Widom and Kadanoff.

28.e.δ Marginaler Operator

28.e.δ Marginal operator

Interessantes Verhalten ergibt sich auch, wenn ein marginaler Operator O_m auftritt, $y_m = 0$. Dann folgt aus

An interesting behaviour is found when a marginal operator O_m appears, $y_m = 0$. Then one obtains from

$$\frac{\mathrm{d}\mu_m}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}a_{mmm}\mu_m^2 \tag{28.50}$$

die Lösung

the solution

$$\mu_m(l) = -\frac{2}{a_{mmm}(l+l_0)} = \frac{2\mu_m(0)}{2 - a_{mmm}l\mu_m(0)}. \tag{28.51}$$

Falls $a_{mmm}\mu_m(0)$ und damit $l_0 = 2/(a\mu_m(0))$ negativ ist, konvergiert $\mu_m(l)$ (sehr) langsam gegen 0, ist es dagegen positiv, so divergiert es. Hat man nun für τ die Gleichung

If $a_{mmm}\mu_m(0)$ and thus $l_0 = 2/(a\mu_m(0))$ is negative, then $\mu_m(l)$ converges (very) slowly towards 0, if it is positive, however, then it diverges. If the equation for τ reads

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = y_E\tau + a_{EmE}\mu_m\tau, \tag{28.52}$$

so folgt

then one obtains

$$\tau(l) = \mathrm{e}^{y_E l}\left(\frac{l+l_0}{l_0}\right)^{-2a_{EmE}/a_{mmm}}\tau(0). \tag{28.53}$$

Dies führt dazu, dass man für Erwartungswerte nicht nur Potenzen von τ, sondern auch Potenzen von τ multipliziert mit nicht ganzzahligen Potenzen von $|\ln|\tau||$ erhalten kann. Solche Singularitäten wurden zuerst für das sphärische Modell gefunden, später generell für die S^4-Theorie in $d = 4$ Dimensionen (Larkin und Khmelnitskii), wie auch für die S^6-Theorie in $d = 3$ Dimensionen (Riedel und F.W.). Dies gilt auch in $d = 3$ für bestimmte Systeme mit Dipol-Wechselwirkung.

This has the consequence, that one obtains not only powers of τ, but also powers of τ multiplied by non-integer powers of $|\ln|\tau||$ for expectation values. Such singularities have been found at first for the spherical model, later generally for the S^4 theory in $d = 4$ dimensions (Larkin and Khmelnitskii), as well as for the S^6 theory in $d = 3$ dimensions (Riedel und F.W.). This applies also for particular systems with dipolar interaction in $d = 3$ dimensions.

Literaturangaben in

Literature in

F.W., The Critical State, General Aspects, in C. Domb and M.S. Green (eds.) Phase Transitons and Critical Phenomena, Academic Press, 6 (1976) p.7-124