27 Homogenitäts- und Skalengesetze

27.a Potenzgesetze und kritische Exponenten

Bereits um die Jahrhundertwende 1900 war bekannt, dass das Molekularfeld-Verhalten etwa der van der Waals-Gleichung das Verhalten in der Umgebung des kritischen Punktes nicht korrekt beschreibt. (Zur Geschichte der kritischen Phänomene siehe J.M.H. Levelt-Sengers, Physica 73 (1974) 73.)

Beispielsweise hatte man experimentell gefunden, dass die Dichte des Gases bzw. der Flüssigkeit nicht durch $\rho - \rho_c \propto (T - T_c)^\beta$ mit $\beta = 1/2$ beschrieben wird, sondern mit $\beta = 0.3434$ (Verschaffelt 1900). Auch die anderen Größen, wie Suszeptibilität, spezifische Wärme, Korrelationen zeigten Gesetze mit anderen Potenzen,

27 Homogeneity and Scaling Laws

27.a Power Laws and critical exponents

Already at the turn of the century 1900 it was known, that the molecular field behaviour of the Van der Waals equation does not describe the behaviour in the vicinity of the critical point correctly. (For the history of critical phenomena see J.M.H. Levelt-Sengers, Physica 73 (1974) 73.)

Experimentally it was found e.g. that the density of a gas and a fluid, resp., is not described by $\rho - \rho_c \propto (T - T_c)^\beta$ with $\beta = 1/2$, but with $\beta = 0.3434$ (Verschaffelt 1900). Also other quantities like the susceptibility, specific heat, correlations showed laws with other powers,

$$\begin{array}{lc}
\text{spezifische Wärme / specific heat} & C \propto \tau^{-\alpha} \\
\text{Ordnungsparameter bei / order parameter at } h = 0 & m \propto \tau^{\beta} \\
\text{Suszeptibilität / susceptibility} & \chi \propto \tau^{-\gamma} \\
\text{Ordnungsparameter bei / order parameter at } T = T_c & m \propto h^{1/\delta} \\
\text{Korrelation bei / correlation at } T_c & g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{2-d-\eta} \\
\text{Korrelationslänge / correlation length} & \xi \propto \tau^{-\nu}.
\end{array} \tag{27.1}$$

Man bezeichnet die Größen α, β, γ, δ, η und ν als kritische Exponenten. In der folgenden Tabelle zeigen wir einige Werte von kritischen Exponenten

The quantities α, β, γ, δ, η and ν are called critical exponents. In the following table we show some values of critical exponents

Exponent exponent	Molekularfeld molecular field	Ising-M. Ising m. $d = 2$	Ising-M. Ising m. $d = 3$	Heisenberg-M. Heisenberg m. $d = 3$	sphärisches M. spherical m. $d = 3$
α	$0\left(\begin{smallmatrix}\text{Sprung}\\ \text{jump}\end{smallmatrix}\right)$	0(ln)	0.109	−0.116	−1
β	1/2	1/8	0.325	0.365	1/2
γ	1	7/4	1.241	1.387	2
δ	3	(15)	4.82	4.80	5
η	0	1/4	0.031	0.033	0
ν	1/2	1	0.630	0.705	1

(27.2)

Zunächst haben wir die Molekularfeld-Werte angegeben. Als nächstes die des zweidimensionalen Ising-Modells. Onsager gelang 1944 die Lösung dieses Modells. Er fand, dass die spezifische Wärme eine logarithmische Singularität hat. Weitere Rechnungen, vor allem von Yang (1952), brachten auch die spontane Magnetisierung und die Suszeptibilität. Allerdings kennt man die exakte Lösung dieses Modells nur für $h = 0$.

At first we have given the molecular field values. Next the exponents of the two-dimensional Ising model are listed. In 1944 Onsager succeeded in solving this model. He found that the specific heat has a logarithmic singularity. Further calculations in particular by Yang (1952) produced the magnetization and the susceptibility. However, the exact solution of this model is only known for $h = 0$.

Man erkannte hieraus, wie auch aus Rechnungen für das sphärische Modell (Berlin und Kac 1952), dass die kritischen Exponenten sich durchaus von den Molekularfeld-Werten unterscheiden können. Auf die Werte des dreidimensionalen Ising- und Heisenberg-Modells werde ich später zurückkommen. Es sei aber bereits bemerkt, dass die Werte für das dreidimensionale Ising-Modell auch für Flüssigkeiten am kritischen Punkt zutreffen sollten. Man sieht, dass Verschaffelts Exponent $\beta = 0.3434$, der tatsächlich nicht so präzis gemessen wurde, gut mit dem $\beta = 0.325$ für das Ising-Modell übereinstimmt.

From this solution as well as from the solution of the spherical model (Berlin and Kac 1952) one learned that the critical exponents may indeed be different from those of molecular field theory. Later we will come back to the exponents for the three-dimensional Ising and Heisenberg models. We note however, that the values for the three-dimensional Ising model should also apply for fluids at the critical point. One realizes, that Verschaffelt's exponent $\beta = 0.3434$, who actually did not measure that precisely, is in good agreement with $\beta = 0.325$ for the Ising model.

Das sphärische Modell ist ein Modell mit der Wechselwirkung

The sperical model is a model with interaction

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} I_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} S(\mathbf{r})S(\mathbf{r}') - h\sum_{\mathbf{r}} S(\mathbf{r}), \tag{27.3}$$

wobei die Wechselwirkung kurzreichweitig ist und die Felder $S(\mathbf{r})$ kontinuierliche reelle Variable sind mit der einzigen Einschränkung $\sum_{\mathbf{r}} S^2(\mathbf{r}) = N$, wobei N die Anzahl der Gitterplätze ist.

where the interaction is short range and the fields $S(\mathbf{r})$ are continuous real variables with the only constraint $\sum_{\mathbf{r}} S^2(\mathbf{r}) = N$, where N is the number of lattice sites.

27.b Skaleninvarianz und Skalengesetze

27.b Scale invariance and scaling laws

27.b.α Kritischer Punkt

27.b.α Critical Point

Wir wollen jetzt die Idee der Skaleninvarianz einführen. Dazu betrachten wir etwa einen Ferromagneten oder ein Gas-Flüssigkeits-System am kritischen Punkt. Durch ein Mikroskop werden wir Domänen (oder Tröpfchen) unterschiedlicher Größe erkennen. Es wird Tröpfchen in Blasen und Bläschen in Tropfen geben, da der kritische Punkt durch starke Fluktuationen charakterisiert ist. Nun gehen wir zu einer geringeren Vergrößerung über und reduzieren den Kontrast in geeigneter Weise. Dann werden wir wesentlich das gleiche Bild vor uns haben, das heißt, auf der neuen Skala haben wir die gleiche Verteilung von Domänen (oder Tropfen) vor uns. Wir sagen: Das kritische System ist skaleninvariant. Nehmen wir an, die ursprüngliche Vergrößerung ergibt eine Korrelation des Ordnungsparameters

Now we will introduce the idea of scale invariance. For this purpose we may consider a ferromagnet or a gas-fluid system at the critical point. Looking through a microscope we will see domains (or droplets) of various sizes. We will find droplets in bubbles and bubbles in droplets, since the critical point is characterized by strong fluctuations. Let us now change to a lower magnification and reduce the contrast in an apropriate way. Then the picture will be essentially the same, that is, at the new scale we have the same distribution of domains (or droplets) before us. We say: The critical system is scale invariant. Let us assume the original magnification yields a correlation of the order parameter

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle = g(r). \tag{27.4}$$

Eine Vergrößerung der Längenskala um den Faktor b

A magnification of the length scale by a factor b

$$\mathbf{r} = b\mathbf{r}' \tag{27.5}$$

ändert die Dichte des Ordnungsparameters gemäß

changes the density of the order parameter according to

$$S(\mathbf{r})\mathrm{d}^d r = \tilde{S}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^d r' = b^{-d}\tilde{S}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^d r, \tag{27.6}$$

wobei d die Dimension des Raumes ist. Die Änderung des Kontrasts bewirkt einen weiteren Faktor, den wir mit b^{y_h} bezeichnen. Dann gilt

where d is the dimension of space. The change of the contrast causes another factor, which we denote by b^{y_h}. Then we have

$$S(\mathbf{r}) = b^{y_h-d}S'(\mathbf{r}') \tag{27.7}$$

und

and

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle = b^{2y_h-2d}\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle. \tag{27.8}$$

Da sich das beobachtete Bild nicht geändert hat, haben wir

Since the observed picture is unchanged, we have

$$\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle = g(r'), \tag{27.9}$$

woraus

from which we conclude

$$g(r) = b^{2(y_h-d)}g(r/b) \tag{27.10}$$

folgt. Diese Gleichung gilt für eine Änderung der Längenskala um einen Faktor (Vergrößerung) b. Wir können dies p mal anwenden

. This equation holds for a change of length scale (magnification) b. We may apply it p times

$$g(r) = b^{2(y_h-d)p}g(r/b^p) \tag{27.11}$$

und können b sehr nahe an eins wählen. Dann erhalten wir mit $b^p = L$ und beliebigem L

and may choose b close to unity. Then we obtain with $b^p = L$ and arbitrary L

$$g(r) = L^{2(y_h-d)}g(r/L). \tag{27.12}$$

Wählen wir schließlich $L = r$, so folgt

If we finally choose $L = r$, then we obtain

$$\langle S(0)S(\mathbf{r})\rangle_{\mathrm{c}} = \frac{g(1)}{r^{d-2+\eta}} \tag{27.13}$$

mit dem kritischen Exponent $\eta = d + 2 - 2y_h$.

with the critical exponent $\eta = d + 2 - 2y_h$.

27.b.β Kritisches Gebiet

Im kritischen Gebiet ist unser System durch die Temperaturdifferenz $\tau = (T - T_{\mathrm{c}})/T_{\mathrm{c}}$ und ein symmetriebrechendes Feld h charakterisiert. Wir beobachten das System wieder durch das Mikroskop. Wenn wir nun die Vergrößerung und den Kontrast wie vorher verändern, beobachten wir ein anderes Bild: Das System ist nicht mehr skaleninvariant. Bei einer geringeren Vergrößerung beobachten wir jedoch das Bild, das wir bei der ursprünglichen Vergrößerung bei einer anderen Temperaturdifferenz τ' und einem anderen symmetriebrechenden Feld h' beobachten. Daher ist die Änderung der Längenskala und der Skala des Ordnungsparameters äquivalent zu einer Abbildung von τ und h nach τ' und h'. Dann folgt für den Ordnungsparameter

27.b.β Critical Region

In the critical region our system is characterized by the temperature difference $\tau = (T - T_{\mathrm{c}})/T_{\mathrm{c}}$ and a symmetry breaking field h. Again we view our system through the microscope. If we change the magnification and the contrast as before, then the situation has changed: The system is no longer scale-invariant. At a weaker magnification we observe however the picture that we had in the original magnification at a different temperature difference τ' and a different symmetry breaking field h'. Thus the change of the length scale and of the scale of the order parameter is equivalent to a mapping from τ and h to τ' and h'. Then we obtain for the order parameter

$$m(\tau, h) = \langle\langle S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} = b^{y_h-d}m(\tau', h'). \tag{27.14}$$

Für die Korrelation folgt

For the correlation one obtains

$$\langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} = b^{2(y_h-d)}\langle S'(\mathbf{0})S'(\mathbf{r}')\rangle_{\tau',h'} \tag{27.15}$$

und damit für die Korrelationsfunktion G

and thus for the correlation function G

$$G(r,\tau,h) = \langle S(\mathbf{0})S(\mathbf{r})\rangle_{\tau,h} - m^2(\tau,h) = b^{2(y_h-d)}G(\frac{r}{b},\tau',h'). \tag{27.16}$$

Auf große Entfernungen ist der Zerfall der Korrelationsfunktion näherungsweise exponentiell,

At large distances the decay of the correlation function is approximately exponential,

$$G(r,\tau,h) \propto \frac{\exp(-r/\xi(\tau,h))}{r^{2(d-y_h)}}. \tag{27.17}$$

Dann folgt für die Korrelationslänge

Then one obtains for the correlation length

$$\xi(\tau,h) = b\xi(\tau',h'). \tag{27.18}$$

Eine ähnliche Beziehung erhält man für die Suszeptibilität (der Faktor $k_\mathrm{B}T$ ist hier weggelassen)

One obtains a similar relation for the susceptibility (here we leave aside the factor $k_\mathrm{B}T$)

$$\begin{aligned}\chi(\tau,h) &= \int \mathrm{d}^d r \langle (S(\mathbf{0})-m)(S(\mathbf{r})-m)\rangle_{\tau,h} \\ &= b^{2y_h-d}\int \mathrm{d}^d r \langle (S'(\mathbf{0})-m')(S'(\mathbf{r}')-m')\rangle_{\tau',h'} \\ &= b^{2y_h-d}\chi(\tau',h'). \end{aligned} \tag{27.19}$$

Wir werden später finden, dass τ' und h' nichtsinguläre Funktionen von τ und h sind. Da sich definitionsgemäß $\tau=0$, $h=0$ auf $\tau'=0$, $h'=0$ abbilden, können wir für kleine τ und h

Later we will find that τ' and h' are non-singular functions of τ and h. Since according to the definition $\tau=0$, $h=0$ map to $\tau'=0$, $h'=0$, we may write for small τ and h

$$\tau' = \lambda_E\tau + \lambda' h, \tag{27.20}$$

$$h' = \lambda''\tau + \lambda_h h \tag{27.21}$$

schreiben. Da ein Vorzeichenwechsel von h nur das Vorzeichen von h' ändern wird, aber nicht τ', sind $\lambda' = \lambda'' = 0$. Wir betrachten nun den Spezialfall $\tau = 0$. Dann gilt offensichtlich

. Since a change of sign of h will change only the sign of h', but not of τ', we have $\lambda' = \lambda'' = 0$. We consider the special case $\tau = 0$. Then apparently

$$m(0,h) = b^{y_h-d}m(0,\lambda_h h), \tag{27.22}$$

$$\chi(0,h) = b^{2y_h-d}\chi(0,\lambda_h h). \tag{27.23}$$

Differenzieren wir (27.22) nach h, so folgt

holds. If we differentiate (27.22) with respect to h, then we obtain

$$\chi(0,h) = b^{y_h-d}\lambda_h\chi(0,\lambda_h h). \tag{27.24}$$

Der Vergleich von (27.23) mit (27.24) ergibt

Comparison of (27.23) with (27.24) yields

$$\lambda_h = b^{y_h}. \tag{27.25}$$

Ähnlich kann man durch Betrachtung des singulären Anteils der Energie und der spezifischen Wärme

Similarly one obtains from the consideration of the singular part the energy and the specific heat

$$\lambda_E = b^{y_E} \tag{27.26}$$

schreiben. Wenn wir nun $b^p = L$ wie früher setzen, dann erhalten wir die Homogenitätsgesetze

If we now put $b^p = L$ as before then we obtain the homogeneity laws

$$\begin{aligned} G(r,\tau,h) &= L^{2(y_h-d)}G(\frac{r}{L},\tau L^{y_E},hL^{y_h}), & (27.27)\\ \xi(\tau,h) &= L\xi(\tau L^{y_E},hL^{y_h}), & (27.28)\\ m(\tau,h) &= L^{y_h-d}m(\tau L^{y_E},hL^{y_h}), & (27.29)\\ \chi(\tau,h) &= L^{2y_h-d}\chi(\tau L^{y_E},hL^{y_h}). & (27.30) \end{aligned}$$

Die Gleichung (27.29) kann nach h integriert werden. Dies ergibt die Dichte der freien Energie, die wir nun mit F bezeichnen (tatsächlich nur den singulären Anteil davon)

Equation (27.29) can be integrated with respect to h. This yields the density of the free energy, which we denote by F (actually only the singular part of it)

$$F_{\text{sing}}(\tau,h) = L^{-d}F_{\text{sing}}(\tau L^{y_E},hL^{y_h}). \qquad (27.31)$$

Diese Beziehung gibt wieder, dass sich die Dichte der freien Energie mit dem Faktor L^d wie das inverse Volumen umskalt, so dass die freie Energie selbst erhalten bleibt. Genau genommen ziehen wir aus der freien Energie auch noch den Faktor $k_{\text{B}}T$ heraus,

This relation reveals, that the density of the free energy scales with the factor L^d like the inverse volume, so that the free energy itself is conserved. Strictly speaking a factor $k_{\text{B}}T$ is extracted from the free enegy.

$$F = \mathcal{F}/(V_{\text{P}}k_{\text{B}}T). \qquad (27.32)$$

Tatsächlich ist F_{sing} nicht die komplette Dichte der freien Energie. Es gibt noch einen regulären Anteil, der nicht zum kritischen Verhalten beiträgt,

F_{sing} is not the complete density of the free energy. THere is also a regular contribution which does not contribute to the regular behavior,

$$F = F_{\text{sing}} + F_{\text{reg}}. \qquad (27.33)$$

Differenziert man (27.31) zweimal nach τ, so erhält man den singulären Anteil der spezifischen Wärme

If one differentiates (27.31) twice with respect to τ then one obtains the singular part of the specific heat

$$C_{\text{sing}}(\tau,h) = L^{2y_E-d}C_{\text{sing}}(\tau L^{y_E},hL^{y_h}). \qquad (27.34)$$

Aus diesen Ausdrücken können wir nun mit der Wahl $h = 0$ (manchmal auch $\tau = 0$) und $|\tau|L^{y_E} = 1$ ablesen, dass die kritischen Exponenten gegeben sind durch

From these expressions we can read of with the choice $h = 0$ (sometimes $\tau = 0$) and $|\tau|L^{y_E} = 1$ that the critical exponents are given by

$$\alpha = \frac{2y_E-d}{y_E}, \quad \beta = \frac{d-y_h}{y_E}, \quad \gamma = \frac{2y_h-d}{y_E}, \quad \delta = \frac{y_h}{d-y_h}, \quad \nu = \frac{1}{y_E}. \qquad (27.35)$$

Da nur zwei Skalen-Exponenten y_h und y_E die kritischen Exponenten bestimmen, sind diese nicht unabhängig. Vielmehr gelten die Skalengesetze

Since only two scaling exponents y_h und y_E determine the critical exponents, they are not independent. The following scaling laws hold

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2, & (27.36)\\ 2-\alpha &= d\nu, & (27.37)\\ \gamma &= \nu(2-\eta) & (27.38)\\ \delta\beta &= \beta+\gamma = 2-\alpha-\beta. & (27.39) \end{aligned}$$

Der letzte Exponent wird auch mit Δ bezeichnet. Er verknüpft Größen, die sich jeweils in einer Ableitung nach h unterscheiden. Man prüfe diese Skalengesetze für die Daten in der Tabelle (27.1) nach. Für welche Dimension d sind die Skalengesetze für die Molekularfeld-Näherung erfüllt?

The last exponent is also denoted by Δ. It relates quantities which differ by derivatives of h. Check the scaling laws for the data of table (27.1). For which dimension d are the scaling laws fulfilled for molecular field approximation?

Die Homogenitätsgesetze lassen sich experimentell überprüfen. Wir gehen aus von Gleichung (27.29)

The homogeneity laws can be experimentally verified. We start from eq. (27.29)

$$m(\tau, h) = L^{y_h - d} m(\tau L^{y_E}, h L^{y_h}) \qquad (27.40)$$

und legen L durch $|\tau| L^{y_E} = 1$ fest. Dann folgt

and fix L by $|\tau| L^{y_E} = 1$. Then one obtains

$$\frac{m}{|\tau|^{(d-y_h)/y_E}} = m(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{y_h/y_E}}) \quad \text{oder / or} \quad \frac{m}{|\tau|^{\beta}} = m(\pm 1, \frac{h}{|\tau|^{\Delta}}). \qquad (27.41)$$

Für den Ferromagneten $CrBr_3$ wurde $h/|\tau|^{\Delta}$ gegen $m/|\tau|^{\beta}$ aufgetragen (Ho und Litster, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 603). Man erkennt, dass die Messpunkte auf zwei Kurven, die eine für $T > T_c$, die andere für $T < T_c$ fallen. Eine ähnliche Auftragung gibt es auch für Nickel (Kouvel und Comly, Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1237). Siehe auch Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Kapitel 11, §4.

For the ferromagnet $CrBr_3$ $h/|\tau|^{\Delta}$ was plotted against $m/|\tau|^{\beta}$ (Ho and Litster, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 603). One observes, that the measured points fall on two curves, one for $T > T_c$, the other one for $T < T_c$. A similar plot exists for nickel (Kouvel und Comly, Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1237). See also Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, chapter 11, §4.

Die dabei beobachteten Exponenten sind für $CrBr_3$ $\beta = 0.368$, $\gamma = 1.215$, für Nickel $\beta = 0.378$, $\gamma = 1.34$.

The observed exponents are $\beta = 0.368$, $\gamma = 1.215$ for $CrBr_3$ and $\beta = 0.378$, $\gamma = 1.34$ for nickel.