26 Molekularfeld-Näherung

Es gibt viele Systeme, bei denen zwei Phasen bei Annäherung an den sogenannten kritischen Punkt einander immer ähnlicher werden. Das bekannteste Beispiel ist der kritische Endpunkt der Koexistenzlinie von Flüssigkeit und Dampf. An diesem Endpunkt und bei höheren Temperaturen kann man nicht mehr zwischen zwei Phasen unterscheiden: Man hat nur noch das Gas. Ein anderes Beispiel ist ein Ferromagnet. Unterhalb der Curie-Temperatur ist das System ferromagnetisch. Ob der Magnetismus in der einen oder anderen Richtung ausgerichtet ist, hängt von der Vorgeschichte ab. Erwärmt man den Ferromagneten, so nimmt die Magnetisierung ab, bis sie schließlich am Curie-Punkt kontinuierlich verschwindet. Es gibt weitere Arten kontinuierlicher Phasenübergänge. Ihnen allen ist gemeinsam, dass man sie durch einen Ordnungsparameter beschreibt. Im Falle des Ferromagneten ist das die Magnetisierung, im Falle des Gas-Flüssig-Übergangs die Differenz zwischen der Dichte und der kritischen Dichte. Dieser Abschnitt ist in erheblichem Umfang dem Abschnitt II des Überblicks-Artikels von L.P. Kadanoff et al. in Review of Modern Physics 39 (1967) p. 395 entnommen.

26 Molecular Field Approximation

There are many systems, for which two phases become more and more similar as one approaches what is called the critical point. The best known example is the critical end-point of the coexistence curve of a fluid and gas. At this end-point and at higher temperatures one can no longer distinguish two phases: There is only the gas phase. Another example is a ferromagnet. Below the Curie temperature the system is ferromagnetic. Whether the magnetization points in one or the other direction depends on the previous history. If one heats the ferromagnet, then its magnetization decays until it vanishes continuously at the critical point. There are other systems showing continuous phase transitions. Common to them is that they can be described in terms of an order parameter. In the case of the ferromagnet it is the magnetization, in the case of the gas-fluid transition the difference between the density and the critical density. This section follows considerably section II of the review article by L.P. Kadanoff et al. in Review of Modern Physics 39 (1967) p. 395.)

26.a Landau-Theorie für kritische Phänomene

Landau hat eine allgemeine Formulierung für diese Phasenübergänge gegeben. Er schreibt die freie Energie (wir werden später sehen, dass es sich um ein Zwischending zwischen Hamilton-Funktion und freier Energie handelt) als Integral über den Raum

26.a Landau theory for critical phenomena

Landau has given a general formulation for these phase transitions. He expresses the free energy (later we will see that it is in between the Hamiltonian and the free energy) in terms of an integral over space

$$\mathcal{F} = \int \mathrm{d}^3 r f(\mathbf{r}) \tag{26.1}$$

und entwickelt die Dichte $f(\mathbf{r})$ nach Potenzen des "Feldes" $S(\mathbf{r})$,

and expands the density $f(\mathbf{r})$ in powers of the "field" $S(\mathbf{r})$,

$$f(\mathbf{r}) = f_0(T) - h(\mathbf{r})S(\mathbf{r}) + a(T)S^2(\mathbf{r}) + b(T)S^4(\mathbf{r}) + c(T)(\nabla S(\mathbf{r}))^2. \tag{26.2}$$

Dabei sei $S(\mathbf{r})$ die Größe, deren Erwartungswert der Ordnungsparameter ist, den wir mit m bezeichnen, $m = \langle S(\mathbf{r})\rangle$. Wir nehmen an, dass die $S(\mathbf{r})$ klassische Größen sind.

Here $S(\mathbf{r})$ is the quantity, whose expectation value is the order parameter, which is denoted by m, $m = \langle S(\mathbf{r})\rangle$. We assume that the $S(\mathbf{r})$ are classical quantities.

Die Größen h, a, b werden als Kopplungen bezeichnet, S, S^2, S^4 Operatoren. Daneben sind sowohl für die Kopplungen wie auch für S die Bezeichnung Feld üblich.

The quantities h, a, b are called couplings, S, S^2, S^4 are operators. But also the couplings and S can be called fields.

Der erste Term $g_0(T)$ ergibt die freie Energie bei verschwindendem Ordnungsparameter. Der zweite Term beschreibt die Ankopplung eines äußeren symmetriebrechenden Felds (im magnetischen Fall eines Magnetfeldes $h = B$). Die weiteren Terme sind gerade in S, da vielfach eine Symmetrie $S \to -S$ besteht, die nur vom hS-Term gebrochen wird.

The first term $g_0(T)$ yields the free energy at vanishing order parameter. The second term describes the coupling of the external symmetry breaking field (in the magnetic case it is the magnetic induction $h = B$). The other terms are even in S, since often there exists a symmetry $S \to -S$, which is only broken by the hS term.

Wenn $\mathcal{F}$ die freie Energie ist, dann erhält man den wahrscheinlichsten Zustand als Minimum der freien Energie. Wir ersetzen also unter Vernachlässigung aller Fluktuationen S durch den Erwartungswert m, variieren $m(\mathbf{r}) \to m(\mathbf{r}) + \delta m(\mathbf{r})$ und erhalten in erster Ordnung in δm

If $\mathcal{F}$ is the free energy then the most probable state is given by the minimum of the free energy. Thus neglecting the fluctuations we replace S by its expectation value m, vary $m(\mathbf{r}) \to m(\mathbf{r}) + \delta m(\mathbf{r})$ and obtain in first order in δm

$$\delta\mathcal{F} = \int \mathrm{d}^3 r \delta m(\mathbf{r})[-h(\mathbf{r}) + 2am(\mathbf{r}) + 4bm^3(\mathbf{r}) - 2c\triangle m(\mathbf{r})] \tag{26.3}$$

Da der Ausdruck für alle $\delta m(\mathbf{r})$ verschwinden muss, folgt

Since the expression has to vanish for all $\delta m(\mathbf{r})$, one obtains

$$(2a + 4bm^2(\mathbf{r}) - 2c\triangle)m(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}). \tag{26.4}$$

Dann ergibt sich aus (26.4) der Ordnungsparameter. Ist die Lösung dieser Gleichung nicht eindeutig, so ist die mit der niedrigsten freien Energie zu wählen. Damit das Verfahren funktioniert, müssen b und c positiv sein. Falls b negativ ist, muss man einen S^6-Term in der freien Energie hinzunehmen. Falls c negativ ist, kann der Ordnungsparameter nicht homogen sein.

Then we obtain from (26.4) the order parameter. If the solution of this equation is not unique, then one has to choose the one with lowest free energy. In order that this procedure works, b and c have to be positive. If b is negative, then a S^6 term has to be taken into account in the free energy. If c is negative, then the order parameter cannot be homogeneous.

Im einfachsten Fall ist h konstant. Dann erhält man

In the simplest case h is constant. Then one obtains

$$(2a + 4bm^2)m = h. \tag{26.5}$$

Für $h = 0$ hat die Gleichung die Lösungen

For $h = 0$ the equation has the solutions

$$m = 0, \tag{26.6}$$
$$m = \pm(-a/2b)^{1/2}. \tag{26.7}$$

Die erste Lösung ergibt das Minimum der freien Energie für $a > 0$, die zweite für $a < 0$. Landau macht nun die einfachste Annahme für die Temperatur-Abhängigkeit von a,

The first solution yields the minimum of the free energy for $a > 0$, the second for $a < 0$. Landau introduces the simplest assumption for the temperature dependence of a,

$$a(T) = a'(T - T_\mathrm{c}). \tag{26.8}$$

Oberhalb T_c verschwindet der Ordnungsparameter, unterhalb ist er von 0 verschieden. Sein Vorzeichen kann positiv oder negativ sein. Legt man ein schwaches symmetriebrechendes Feld an, so ergibt sich eine Änderung δm des Ordnungs-Parameters aus

The order parameter disappears above T_c, below T_c it differs from 0. Its sign can be positive or negative. If one applies a weak symmetry breaking field, then one obtains a small change δm of the order parameter from

$$2a(m+\delta m)+4b(m^3+3m^2\delta m)=h, \tag{26.9}$$

woraus

which yields

$$\begin{array}{lllll} \text{für/for } T>T_c & a>0, & m=0 & \delta m=\frac{h}{2a}=\frac{h}{2a'(T-T_c)}, \\ \text{für/for } T<T_c & a<0, & m=(-a/2b)^{1/2}, & \delta m=\frac{h}{-4a}=\frac{h}{4a'(T_c-T)} \end{array} \tag{26.10}$$

folgt. Die Suszeptibilität divergiert also mit $|T-T_c|^{-1}$.

Thus the susceptibility diverges like $|T-T_c|^{-1}$.

An der kritischen Temperatur ergibt sich aus (26.5) ein Anwachsen der Magnetisierung mit

At the critical temperature eq. (26.5) yields an increase of the magnetization like

$$m=\left(\frac{h}{4b}\right)^{1/3}. \tag{26.11}$$

Schließlich beobachten wir noch, dass die freie Energie bei $h=0$ von der Form

Finally we observe that at $h=0$ the free energy is of the form

$$\mathcal{F}=\left\{\begin{array}{ll} V_P f_0(T) & \text{für } T>T_c \\ V_P(f_0(T)-a(T)^2/4b) & \text{für } T<T_c \end{array}\right. \tag{26.12}$$

ist. Dieser Extra-Beitrag in der freien Energie führt unter Berücksichtigung von

This extra term in the free energy yields considering

$$C_h=-T\partial^2\mathcal{F}/\partial T^2/V_P \tag{26.13}$$

auf einen Sprung in der spezifischen Wärme $\Delta C = T_c a'^2/2b$ pro Volumen bei T_c, wobei angenommen wird, dass die zweite Ableitung von $f_0(T)$ stetig ist.

a jump in the specific heat $\Delta C = T_c a'^2/2b$ per volume at T_c, where it is assumed, that the second derivative of $f_0(T)$ is continuous.

Wir geben eine anschauliche Argumentation für die Beziehung (26.8). Wir betrachten das System auf einer Skala, auf der wir zur Bestimmung der Dichte $S(\mathbf{r})$ bereits mehrere Spins eines Ising-Modells einbeziehen, das heißt wir mitteln über ein Volumen ΔV mit vielen Spins. Dann beschreibt ein $S(\mathbf{r})$ eine große Anzahl von Konfigurationen, die in dem Volumen ΔV die gleiche Gesamt-Magnetisierung haben. Unser $\mathcal{F}$ enthält sowohl die Energie wie auch die Entropie des Systems. Da die Wechselwirkung des Ising-Modells bilinear ist, erwarten wir Terme proportional $S(\mathbf{r})$, wenn ein Magnetfeld anliegt und proportional S^2 und $(\nabla S(\mathbf{r}))^2$. Da eine parallele Ausrichtung der Spins energetisch günstig ist, ist der Vorfaktor a_1 vor S^2 negativ und der Koeffizient c vor $(\nabla S(\mathbf{r}))^2$ positiv. Dazu kommt dann der Entropie-Beitrag. Man kann diesen nach Potenzen von S^2 entwickeln, $S_{\text{ent}} = f_0 + a_2S^2+b_2S^4+\dots$. Da die Entropie mit wachsender Ordnung, d.h. mit wachsendem S^2 abnimmt und zwar immer stärker, sind a_2 und b_2 negativ.

Now we give an intuitive argument for the relation (26.8). We consider the system on a scale where we determine the density $S(\mathbf{r})$ already from several spins of an Ising model, that is we average over a volume ΔV which contains many spins. Then $S(\mathbf{r})$ describes a large number of configurations which within the volume V have the same total magnetization. Thus our $\mathcal{F}$ contains both energy and entropy of the system. Since the interaction of the Ising model is bilinear, we expect a term proportional to $S(\mathbf{r})$ if a magnetic field is applied and terms proportional to S^2 and due to the interaction proportional to $(\nabla S(\mathbf{r}))^2$. Since a parallel allignment of the spins is energetically favourable, the prefactor a_1 in front of S^2 is negative and the coefficient c in front of $(\nabla S(\mathbf{r}))^2$ is positive. In addition one has a contribution from the entropy. One may expand it in powers of S^2, $S_{\text{ent}} = f_0 + a_2S^2 + b_2S^4 + \dots$. Since the entropy decreases with increasing order that is with increasing S^2 and even increasingly strong, both a_2 and b_2 are negative.

Damit ergibt sich in der freien Energie $\mathcal{F} = E - TS_{\text{ent}}$ ein positiver Koeffizient $b = -Tb_2$, aber $a = a_1 - Ta_2$, wobei sowohl a_1 als auch a_2 negativ ist. Man erkennt, dass a für hohe Temperaturen positiv ist, da der Entropie-Term überwiegt. Für tiefe Temperatur ist a negativ, da der Energie-Term überwiegt. Bei $T = T_c$ heben sie sich im Rahmen der Molekularfeld-Näherung weg.

Thus in the free energy $\mathcal{F} = E - TS_{\text{ent}}$ we have a positive coefficient $b = -Tb_2$, but $a = a_1 - Ta_2$, where both a_1 and a_2 are negative. One realizes that a is positive at high temperatures, since the entropy term dominates. At low temperatures a is negative, since the energy term wins. At $T = T_c$ both contributions cancel within molecular field approximations.

26.b Korrelationen

26.b Correlations

Wir betrachten nun die Fluktuationen des Ordnungs-Parameters. Genauer gesagt, wir interessieren uns für die Korrelationen

Now we consider the fluctuations of the order parameter. More precisely we are interested in the correlations

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle (S(\mathbf{r}) - m)(S(\mathbf{r}') - m) \rangle = \langle S(\mathbf{r}) S(\mathbf{r}') \rangle - m^2. \tag{26.14}$$

Diese können wir dadurch erhalten, dass wir uns fragen, um wieviel sich der Ordnungs-Parameter am Ort $\mathbf{r}$ ändert, wenn wir am Ort $\mathbf{r}'$ das h-Feld ändern. Aus

These can be obtained by asking, how much the order parameter varies at point $\mathbf{r}$, if we change the field h at point $\mathbf{r}'$. From

$$\langle A \rangle_\Delta = \frac{\mathrm{tr}(A \exp[(-H + \Delta)/(k_\mathrm{B} T)])}{\mathrm{tr}(\exp[(-H + \Delta)/(k_\mathrm{B} T)])} = \langle A \rangle_0 + \frac{\langle A \Delta \rangle - \langle A \rangle \langle \Delta \rangle}{k_\mathrm{B} T} \tag{26.15}$$

folgt dann in erster Ordnung in δh für $A = S(\mathbf{r})$ und $\Delta = \int \mathrm{d}^d r' \delta h(\mathbf{r}') S(\mathbf{r}')$

we obtain in first order in δh for $A = S(\mathbf{r})$ and $\Delta = \int \mathrm{d}^d r' \delta h(\mathbf{r}') S(\mathbf{r}')$

$$\delta m(\mathbf{r}) = \delta \langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{k_\mathrm{B} T} \int \mathrm{d}^3 r' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta h(\mathbf{r}'). \tag{26.16}$$

Ersetzen wir nun in (26.4) $m(\mathbf{r}) \to m(\mathbf{r}) + \delta m(\mathbf{r})$ und $h(\mathbf{r}) \to h(\mathbf{r}) + \delta h(\mathbf{r})$, so folgt

If we replace $m(\mathbf{r}) \to m(\mathbf{r}) + \delta m(\mathbf{r})$ and $h(\mathbf{r}) \to h(\mathbf{r}) + \delta h(\mathbf{r})$ in (26.4), then we obtain

$$(2a + 12bm^2 - 2c\triangle) \delta m(\mathbf{r}) = \delta h(\mathbf{r}). \tag{26.17}$$

Diese Gleichung wird in drei Dimensionen durch

This equation is solved in three dimensions by

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{k_\mathrm{B} T}{8\pi c} \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{26.18}$$

mit

with

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{a + 6bm^2}} = \begin{cases} (c/a')^{1/2} (T - T_c)^{-1/2} & {}^{\text{für}}_{\text{for}} T > T_c, h = 0, \\ (c/2a')^{1/2} (T_c - T)^{-1/2} & {}^{\text{für}}_{\text{for}} T < T_c, h = 0 \end{cases} \tag{26.19}$$

gelöst. Wir sehen daraus, dass sich die Korrelation bei Annäherung an den kritischen Punkt über große Entfernungen, gegeben durch die Korrelationslänge ξ, erstreckt. In drei Dimensionen fällt die Korrelation am kritischen Punkt mit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ ab. In d Dimensionen erfolgt der Abfall mit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-(d-2)}$.

Thus we see that approaching the critical point the correlations extend over large distances, given by the correlation length ξ. In three dimensions the correlation decays at the critical point like $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. In d dimensions the decay is given by $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-(d-2)}$.

26.c Gültigkeits-Bereich der Landau-Theorie

Diese Theorie nimmt an, dass man die freie Energie nach Potenzen des Ordnungsparameters entwickeln kann. Dies gilt für viele Theorien (Näherungen) wie der van der Waals Gleichung für eine Flüssigkeit oder der Weissschen Molekularfeldtheorie. Wir haben auch die Supraleitung in dieser Form behandelt. Diese Theorien geben in der Regel korrekte Aussagen, so lange man nicht zu nahe am kritischen Punkt ist. In der unmittelbaren Umgebung des kritischen Punktes ergeben sie aber falsche Ergebnisse.

Ginzburg hat ein Kriterium angegeben, wann die Molekularfeld-Näherung gut ist. Dabei verwendet man folgendes Argument: Man hat erhebliche Fluktuationen des Ordnungsparameters. Jedoch kann man diese über ein Gebiet mitteln. Der größte Abstand, über den das sinnvoll ist, ist die Korrelationslänge. Man verlangt daher, dass die Korrelation klein ist gegen das Quadrat des Ordnungs-Parameters,

26.c Range of Validity of the Landau theory

This theory assumes that the free energy can be expanded in powers of the order parameter. This applies for many theories (approximations) like the van der Waals equation for a fluid or Weiss's molecular field theory. We have treated superconductivity in a similar way. These theories yield normally correct answers as long as one does not approach the critical point too closely. In the immediate vicinity of the critical point they yield wrong results.

Ginzburg has given a criterion when molecular field theory is good. He uses the following argument: There are significant fluctuations of the order parameter. However, one may average them over sum region. The largest distance across which this makes sense is the correlation length. Thus one requires that this correlation is small in comparison to the square of the order parameter,

$$\langle\delta S(\mathbf{r})\delta S(\mathbf{r}')\rangle_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\xi} \ll m^2. \tag{26.20}$$

Wir lassen nun der Einfachheit halber alle Zahlenfaktoren weg, betrachten das Problem aber für allgemeine Dimension d des Raums. Dann ergibt die Ungleichung zunächst

Now we leave out all numerical factors for simplicities' sake, nbut we consider the problem for general dimension d of space. Then at first the inequality yields

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{c}}{c\xi^{d-2}} \ll \frac{|a|}{b}. \tag{26.21}$$

Wir bezeichnen nun die Korrelationslänge bei Temperatur 0 mit ξ_0 und führen die relative Temperaturdifferenz $\tau = \frac{T-T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}}$ ein. Dann können wir $\xi = \xi_0/|\tau|^{1/2}$ und $a = a'T_\mathrm{c}\tau$ schreiben, wodurch die Ungleichung die Form

We denote the correlation length at zero temperature by ξ_0 and introduce the reduced temperature difference $\tau = \frac{T-T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}}$. Then we may write $\xi = \xi_0/|\tau|^{1/2}$ and $a = a'T_\mathrm{c}\tau$, which brings the inequality into the form

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{c}|\tau|^{d/2-1}}{c\xi_0^{d-2}} \ll \frac{a'T_\mathrm{c}|\tau|}{b} \text{ oder } |\tau|^{2-d/2} \gg \frac{k_\mathrm{B}b}{ca'\xi_0^{d-2}} \tag{26.22}$$

annimmt. Wir können nun noch a', b und c eliminieren, indem wir die Korrelationslänge bei Temperatur 0 und den Sprung ΔC in der spezifischen Wärme durch diese Größen ausdrücken,

We may now eliminate a', b and c by expressing the correlation length at zero temperature and the jump ΔC of the specific heat by these quantities,

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{c}{a'T_\mathrm{c}}}, \quad \Delta C = T_\mathrm{c}\frac{a'^2}{b}. \tag{26.23}$$

Wir erhalten dann

Then we obtain

$$|\tau|^{2-d/2} \gg \frac{k_\mathrm{B}}{\xi_0^d \Delta C}. \tag{26.24}$$

Tatsächlich ist noch ein numerischer Faktor einzufügen. Nach der vorhergehenden Rechnung wäre das $1/(16\pi e)$ für $d = 3$. Ginzburg und Levanyuk haben eine etwas sorgfältigere Argumentation durchgeführt und kommen zu dem Ergebnis, dass die Landau-Theorie für $|\tau|$ größer als

Actually there has to be introduced a numerical factor. According to our calculation it would be $1/(16\pi e)$ for $d = 3$. Ginzburg and Levanyuk used a more careful argument and came to the conclusion, that the Landau theory should be good for $|\tau|$ larger then

$$\tau_c = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{k_B}{\Delta C \xi_0^3}\right)^2 \tag{26.25}$$

gut sein sollte. Der Faktor ξ_0^6 im Nenner von τ_c zeigt an, dass mit wachsender Reichweite der Kräfte, die zu einer größeren Korrelationslänge ξ_0 führt, der Bereich, in dem die Landau-Theorie nicht gilt, sehr klein werden kann. Dies gilt insbesondere für konventionelle Supraleiter. In Zinn findet man $\xi_0 = 2300$ Å und $\Delta C = 0.8 \times 10^4$ erg/cm^{3}K, woraus $\tau_c \approx 10^{-14}$ folgt. Im flüssigen Helium hat man ein ξ_0, das dem Abstand der Atome entspricht. Es folgt $\tau_c \approx 1$. In Eisen ist der Sprung in der spezifischen Wärme $\Delta C \approx 3 \times 10^7$ erg/cm^3 K und $\xi_0 = 2$ Å, woraus $\tau_c \approx 10^{-2}$ folgt. Im Antiferromagneten haben die Magnetfelder der Spins die Tendenz, sich gegenseitig wegzuheben. Daher ist dort die effektive Wechselwirkung kurzreichweitig und τ_c relativ groß. In Ferroelektrika hat Ginzburg $\tau_c \approx 10^{-4}$ abgeschätzt. Für Antiferroelektrika erwartet man wieder größere τ_c.

The factor ξ_0^6 in the denominator of τ_c indicates, that with increasing range of the forces, which produces a larger correlation length ξ_0, the range in which Landau theory does not apply can become very small. This holds in particular for conventional superconductors. For tin one finds $\xi_0 = 2300$ Å and $\Delta C = 0.8 \times 10^4$ erg/cm^{3}K, which yields $\tau_c \approx 10^{-14}$. In fluid helium one has a ξ_0, which corresponds to the distance of the atoms. One obtains $\tau_c \approx 1$. The jump in the specific of iron is $\Delta C \approx 3 \times 10^7$ erg/cm^3 K and $\xi_0 = 2$ Å, which yields $\tau_c \approx 10^{-2}$. The magnetic fields of the spins in an antiferromagnet have a strong tendency to cancel. Thus the effective interaction is of short range and one obtains a relatively large τ_c. Ginzburg has estimated $\tau_c \approx 10^{-4}$ in ferroelectrics. One expects larger τ_c in antiferroelectrics.

Wir haben die obige Rechnung für allgemeine Dimension durchgeführt. Damit haben wir nicht nur eine Abschätzung für zweidimensionale Schichten. Wir sehen noch etwas anderes: Wenn nämlich $d > 4$, dann steht auf der linken Seite der Gleichung (26.24) $|\tau|$ hoch einem negativen Exponenten. Das heißt, dann ist die Umgebung des kritischen Punktes nicht mehr von der Landau-Theorie ausgeschlossen. In vier Raumdimensionen ist $|\tau|^{2-d/2} = 1$. Tatsächlich ist dies ein Grenzfall für die Landau-Theorie, auf den wir zurückkommen werden.

The above calculation has been performed for general dimensions. Thus it does not only yield estimates for two-dimensional layers. We observe something else: If $d > 4$, then $|\tau|$ appears on the left hand-side of eq. (26.24) with a negative power. This means that the vicinity of the critical point is no longer excluded from Landau theory. In four space dimensions one has $|\tau|^{2-d/2} = 1$. This is indeed a limit case of the Landau theory to which we will return.