

Stringtheorie

Carlo Ewerz

Vorlesung
an der

Universität Heidelberg

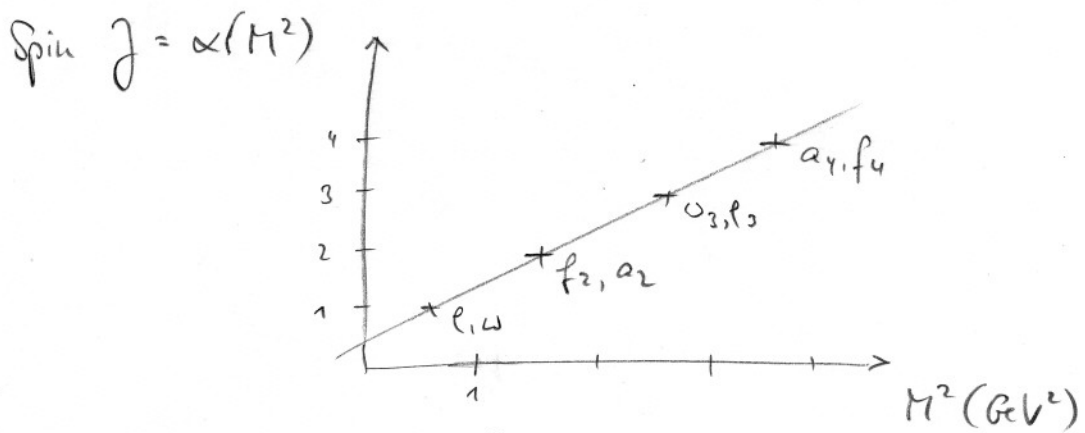
I. Einführung, Überblick

(1)

1) Geschichte der Stringtheorie

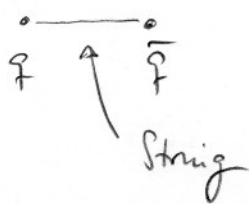
1960er: Regge-Theorie für starke WW

* Beobachtung: Mesonen liegen auf Regge-Trajektorien



$$J = \alpha(M^2) = \alpha_0 + \alpha' M^2 \quad \text{mit } \alpha' \approx 1 \text{ GeV}^{-2}$$

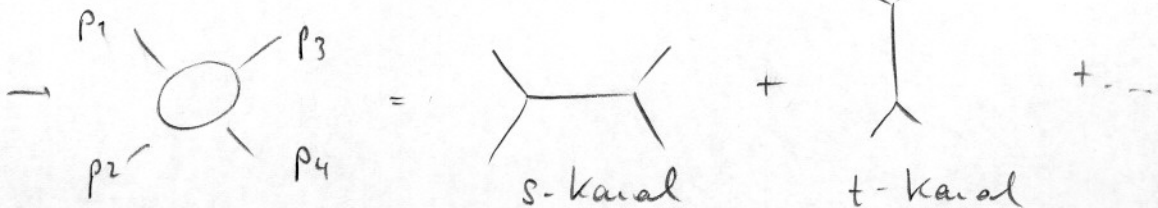
→ Stringbild für Mesonen:



Stringtension: $k \approx \frac{1}{5} \text{ GeV}^{-2}$
 $= \frac{1}{2\pi\alpha'}$

$E(r) \sim kr$

* Hochenergiestreuung:
 z.B. $\pi\pi$ -Streuung



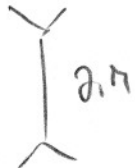
$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 + p_3)^2, \quad u = -(p_1 + p_4)^2, \quad s + t + u = \sum_i m_i^2$$

Invariant unter zyklischen Permutationen

→ Invariant von $A(s,t)$ unter $s \leftrightarrow t$

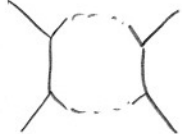
Austausch von Teilchen mit Spin J , Masse M

→ Beitrag $A_J(s,t) = - \frac{g^2 (-s)^J}{t - M^2}$




→ Probleme mit Hochenergieverhalten bei hohen Spins!

Unitaritätsstranke: $\sigma_{tot} \leq \log^2 s$

(vgl.  $\sim A^2$)

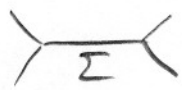
Viele Austausche mit höheren J, M :

$$A(s,t) = - \sum_J g_J^2 \frac{(-s)^J}{t - M_J^2} = \sum \text{diagram}$$


→ endliche Summe geht nicht, aber unendliche Summe möglich!

Aber: müssen s-Kanal - Pole separat dazu, oder schon in unendl. Summe enthalten?

Im s-Kanal:

$$A'(s,t) = \text{diagram} = - \sum_J g_J^2 \frac{(-t)^J}{s - M_J^2}$$


Frage: Ist $A = A'$?
(im Gegensatz zur Feldtheorie!)

→ Dualitätshypothese!

→ "Duale Resonanzmodelle"

s- und t-Kanal-Diagramme als
duale Beschreibungen

Scheit bei kleinen s, t (zumindest
näherungsweise) zu stimmen!

Aber wie kann das sein?

Veneziano: (1968)

Es gibt so eine Formel:

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}$$

mit Euler-Gamma-Fkt.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

d.h. $A(s, t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t))$ Euler-Beta-Fkt
 $= \int_0^1 x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} dx$

Hieraus im Hochenergie limit, d.h.
für $s \rightarrow \infty$, t fest und mit linearen
Regge - Trajektorien

$$A(s,t) \sim s^{\alpha(t)}$$

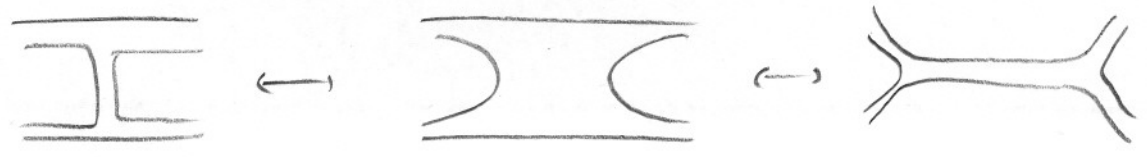
Das Veneziano - Modell erfüllt alle
Anforderungen (außer Unitarität, geht
aber, wenn man es als Born - Term
auffasst) und hat die Eigenschaften
eines dualen Resonanzmodells.

[siehe hierzu im Detail: Green, Schwarz, Witten]

Nambu, Goto:

Veneziano - Amplitude entspricht klassischem
relativistischen String

Anschaulich im Stringbild für Mesonen:



≙ t-Kanal

≙ s-Kanal

Als Stringamplitude aber alle drei gleich!

Probleme der Veneziano - Amplitude:

- * fixed-angle scattering ($s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ bei $\frac{s}{t}$ fest) kommt falsch heraus, d.h. im Widerspruch zum Experiment.
- * quantenmechanisch nur konsistent in 26 Dimensionen?! (oder 10 mit SUSY) \rightarrow nicht relevant für starke Wechselwirkung in 4-dim. Welt.
- * Problem: masseloses Spin-2-Teilchen
- * Anforderung: QCD als richtige Theorie der starken Wechselwirkung gefunden.

* Scherk, Schwarz (74)

Vorschlag: Strings als TOE (Theory of Everything)
masseloses Spin-2-Teilchen als Graviton
... aber zunächst nicht so ernst genommen

* Green, Schwarz (84)

Superstrings sind Anomalie-frei und wahrscheinlich endlich in allen

Ordnungen Störungstheorie (bis heute nicht bewiesen)



\rightarrow 1. Superstring - Revolution

(6)

Es wurden 5 konsistente Superstringtheorien
in 10 Dimensionen gefunden.
 $E_8 \times E_8$ heterotisch als bester Kandidat
für TOE gehandelt.

* Witten, Townsend (~95)

Dualitäten! → Die 5 Theorien sind
dual zueinander.

→ M-Theorie

→ 2. Superstring - Revolution

Zusammenhänge zwischen perturbativen und
nichtperturbativen Theorien.

→ nichtperturbative Objekte:
p-branes, D-branes

* neuere Entwicklungen:

* mikroskopische Erklärung f. Entropie
und thermische Strahlung schwarzer
Löcher

* Stringtheorie / Eichtheorie - Dualitäten
(AdS / CFT)

2) Standardmodell und Vereinheitlichung

Standardmodell:

Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

mit spontaner Symmetriebrechung

$$SU(2) \times U_Y(1) \rightarrow U_{em}(1)$$

(Higgs - Mechanismus)

3 Familien

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Eichbosonen: $\gamma, W^{\pm}, Z, 8$ Gluonen

offene Fragen:

* ≥ 19 freie Parameter:

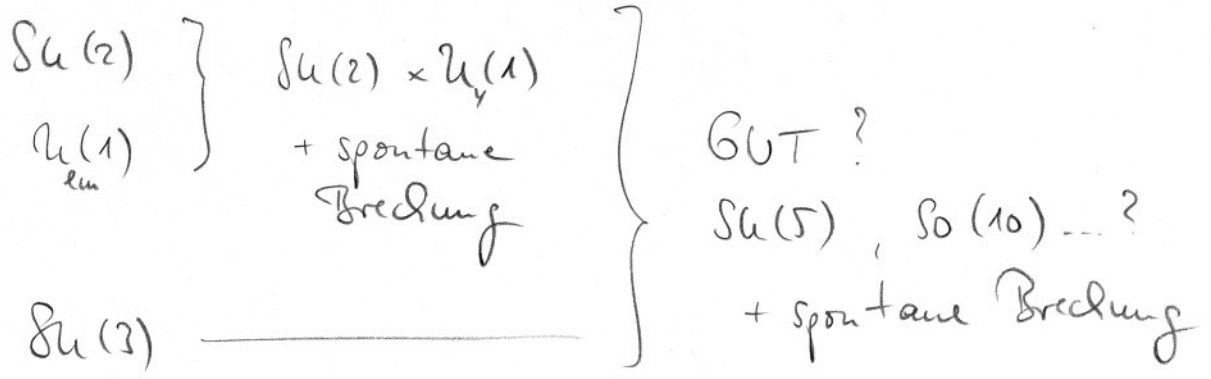
Massen, Mischungswinkel etc.

* warum diese $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ - Ladungen?

* warum 3 Familien?

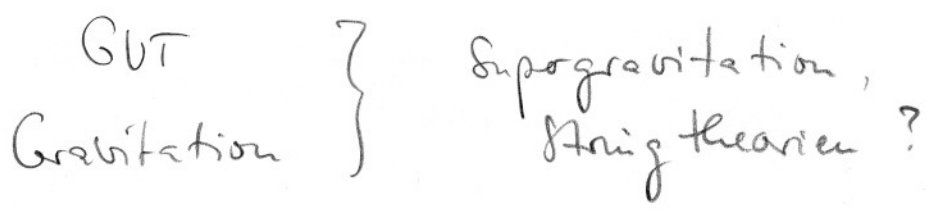
* warum diese Eichgruppe?

Veri einheitlich

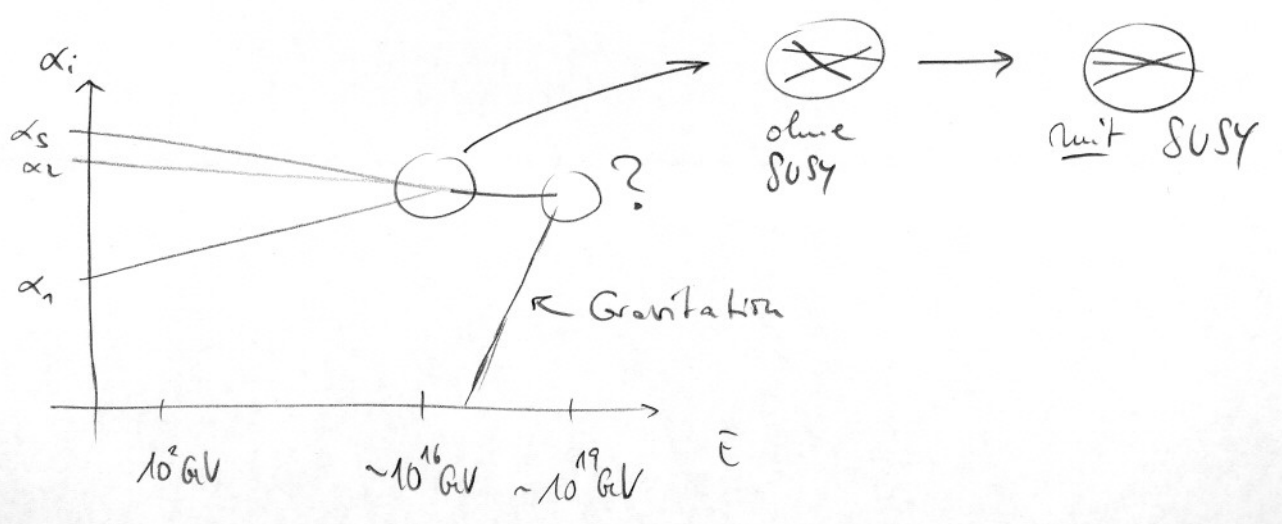


Aber: auch GUTs erklären nicht die Parameter des SM

und: Veri einheitlich mit Gravitation ?!
(erste Ideen: Kaluza, Klein)



Hinweis auf Veri einheitlich:
Verhalten der Kopplungskonstanten



3) Quantenmechanik und Gravitation

- * Raum-Zeit selbst als Feld $g_{\mu\nu}$
- * klassische Einstein-Gleichungen:
punktförmige Singularitäten \rightarrow QM-Effekte?
- * Allg. Relativitätstheorie als QFT
nicht renormierbar!

mit $\hbar = c = 1$,

G_N hat negative Massendimension $[G_N] = [M]^{-2}$

\rightarrow nicht renormierbar (jedenfalls potentiell)

[Es sei denn endlich in jeder Ordnung,
aber: divergent in höheren Ordnungen]

$$G_N = \frac{1}{M_{Pl}^2} \quad \text{mit } \underline{\text{Planck-Masse}}$$

$$M_{Pl} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$$

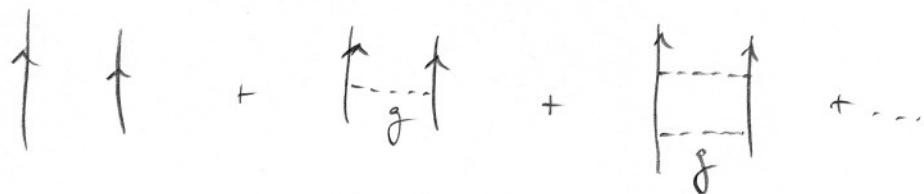
bzw. entsprechender Planck-Länge

$$l_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

(Experimentell heute erreichbar: $10^2 - 10^3 \text{ GeV}$)

\rightarrow erwarte q.m. Effekte bei $\sim M_{Pl}$

Diagramme für Graviton austausch:



wobei

$$\text{Diagram} \sim \frac{1}{M_{Pl}^4} \int d^3 \epsilon' \epsilon'^3 \quad \text{divergent!}$$

Ausweg: punktförmige Teilchen aufgeben!

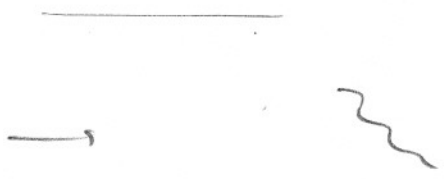
→ Strings!



kein fester Wechselwirkungspunkt mehr
(vom Beobachter abhängig)

[es gibt auch andere Möglichkeiten, die
 erprobt worden: nicht-kommutative Geometrie,
 Raum-Zeit-Gitter $\sim l_{Pl} \dots$]

Längenskala der Strings: $\sim l_{pe}$
 → bei größeren Abständen nur "Mittelung"
 sichtbar → Strings erscheinen bei
 größeren Abständen punktförmig.
 Bei unseren Skalen Strings durch QFT
 beschrieben.

→ 

viele verschiedene
 Teilchen nur 1 String!

→ Teilchen als Anregungen
 (vgl. Regge - Trajektorien)

Starke WW: Viele Teilchen auf Trajektorien
 sichtbar.

Superstrings: Spannung T so groß, daß
 Massen der Anregungen $\sim M_{pl}$.

→ unsere Teilchen sind masselose
 Zustände der Strings + Korrekturen

4) Eigenschaften der Stringtheorie

(Hoffnungen , Versprechungen , Probleme)

* Gravitation

konsistente Stringtheorie → masselose Spin 2-Teilchen mit WW wie in allg. Relativitätstheorie bei niedrigen Energien

* konsistente Theorie der Quantengravitation

(zumindest in Störungstheorie, allg. Beweis fehlt noch)

* große Vereinheitlichung

Eichgruppen, die groß genug sind für SM. Stringtheorie enthält GUTs, SYM, Supergravitation, Kaluza-Klein-Theorien...

* Supersymmetrie

notwendig in Stringtheorie!

* Extra-Dimensionen

konsistent erfordert $D=26$ (bosonisch) bzw. $D=10$ (Superstrings)

→ Kompaktifizierung von Dimensionen
 $\mathcal{N}=1$ SUSY in $D=4$ erfordert
 6-dim. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit
 (kompakte Kähler-Mgf. mit
 verschwindender erster Chern-Klasse)
 aber: welche?
 Millionen Möglichkeiten
 von dieser Wahl abhängig:
 Zahl der Familien etc.

* direkte Eichkopplungen
 wie im SM erforderlich

* keine freien Parameter
 → sollte alle SM-Parameter vorhersagen
 (↔ Kompaktifizierung)

* M-Theorie (11-dim)

5 verschiedene konsistente Stringtheorien,
 fast nur in Störungstheorie untersucht
 jetzt: diese 5 sind alle Aspekte
 (Grenzwerte) einer Theorie (M-Theorie)

→ Dualitäten zwischen stark und
 schwach gekoppelten Theorien

* höherdimensionale Objekte in Stringtheorie:

- D-branes (Dirichlet - p-branes)
- nichtperturbative Objekte
- offene Strings können auf D-branes enden

→ neue Entwicklungen bzgl. D-branes:

* nichtperturbative Stringdualitäten
Theorie A ↔ Theorie B

geschlossener String ↔ D-brane
(Amplitude $\sim g_s$) ($\sim 1/g_s$)

* mikroskopische Erklärung für Entropie und Hawking - Strahlung schwarzer Löcher

* AdS / CFT - Korrespondenz
(Anti de Sitter / konforme Feldtheorie)

bzw. String-/Eichtheorie - Dualität

→ neue Möglichkeit, nichtperturbative Eigenschaften von Eichtheorien zu studieren

* große Extra - Dimensionen ($\leq 1 \text{ mm}$)

→ Hierarchie - Problem

brane-world - Szenarios

* Probleme der Stringtheorie

- nicht direkt experimentell überprüfbar
- SUSY nicht gefunden, SUSY-Brechungsmechanismus unbekannt
- viele Vakua möglich
- Mechanismus für Kompaktifizierung unbekannt

- ...

II. Klassischer bosonischer String

1

Betrachte Bewegung in D (flachen) Raumzeit-Dimensionen.

Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, \dots, +)$

$$\mu, \nu = 0, \dots, D-1$$

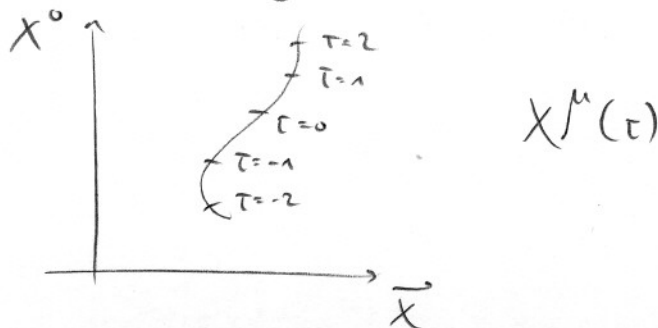
1) Relativistisches Punktteilchen

Eine mögliche Beschreibung:

Ortskoordinaten als Funktion der Zeit, $\vec{X}(x^0)$,
aber nicht kovariant

Alternativ:

Parametrisierung der Weltlinie



Teilchen bewegt sich entlang Geodätischer,
d.h. relativistische Länge der Weltlinie
ist minimal

→ Länge der Weltlinie als Wirkung

$$S_{pp} = -m \int dt \sqrt{|\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu|}$$

wobei $|\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu| = -\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$

↑
" " wegen Metrik (reelles Teilchen \rightarrow neg. Länge)

mit

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

S_{pp} ist Poincaré-invariant

mit $t=c=1$: m hat Dimension $[\text{Länge}]^{-1} = [\text{Masse}]$

Bewegungsgleichung wie üblich für
relativistisches Teilchen:

$$\delta S_{pp} = -m \int dt \dot{x}^\mu \delta x^\mu \quad (\text{nach part. Integ.})$$

mit

$$w^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}$$

\rightarrow Bewegungsgleichung

$$p^\mu = m w^\mu = 0,$$

d.h. freie Bewegung

* Parametrisierung der Weltlinie ist physikalisch nicht relevant.

→ Reparametrisierungsinvariant

S_{pp} ist invariant unter (monotonen)

Reparametrisierung

$$\tilde{\tau}(\tau), \quad \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} > 0$$

[Beweis mit

$$d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = d\tilde{\tau} \sqrt{-\dot{x}^\mu(\tilde{\tau}) \dot{x}_\mu(\tilde{\tau})}]$$

* Wurzel in Wirkung S_{pp} ist unpraktisch.

Anderer, äquivalente Möglichkeit:

Führe Hilfsfeld $e(\tau)$ ein und betrachte

$$S'_{II} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{e} - e u^2 \right)$$

(quadratisch in \dot{x})

→ besser für Pfadintegrale)

S'_{II} ist ebenfalls Poincaré-invariant.

Für Reparametrisierungsinvariant unter

$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ transformiere $e \rightarrow \tilde{e}$ mit

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) = \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \right)^{-1} e(\tau)$$

bzw.

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = e(\tau) d\tau$$

Bewegungsgleichung bei Variation von e :

$$e^2 = - \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{m^2}$$

Eliminiert man hiermit e in S_{pp}' , so bleibt man S_{pp} .

Wegen Reparametrisierungsinvarianz ist beliebige Form für e möglich. \rightarrow Wähle z.B. $e=1$:

$$\rightarrow \boxed{S_{pp}' = \frac{1}{2} \int dt (\dot{x}^2 - m^2)}$$

Hieraus Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{x}^\mu = 0}$$

Mit $e=1$ in der Bewegungsgleichung für e :

$$\boxed{\dot{x}^2 + m^2 = 0}$$

$p^\mu = \dot{x}^\mu$ ist der zu x^μ konjugierte Impuls

\rightarrow Massenschalenbedingung

$$p^2 + m^2 = 0$$

\rightarrow Interpretation von m als Masse des Teilchens

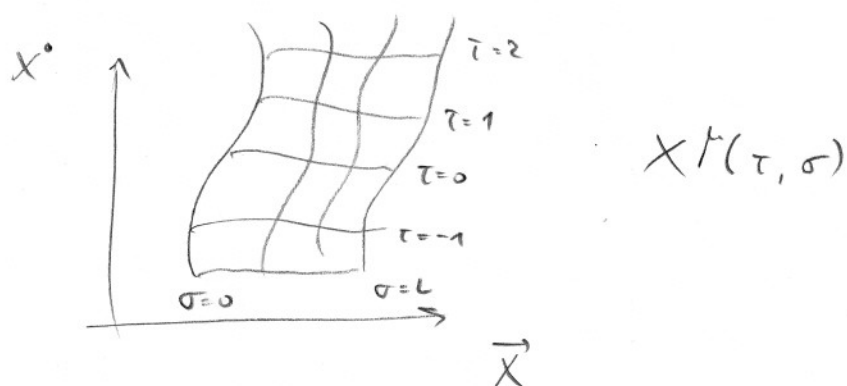
2) Klassischer bosonischer String

Analoges Vorgehen für 1-dim. Objekt (String)

2 Parameter: τ, σ (manchmal auch σ^0, σ^1)

τ "zeitartig", σ parametrisiert Länge d. Strings

jetzt: Weltfläche (world sheet) statt Weltlinie



Welche relativistischen Flächeninhalt der Weltfläche als Wirkung

→ Nambu-Goto-Wirkung:

$$S_{\text{NG}}[X] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu}$$

wobei

a, b : Weltflächenparameter $a, b = 0, 1$

(nicht zu verwechseln mit $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$)

und

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$$

und die Determinante in S_{NG} über diese beiden Indizes.

T hat Dimension [Masse]².

→ T ist Stringspannung bzw. Energie pro Länge

oft
$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

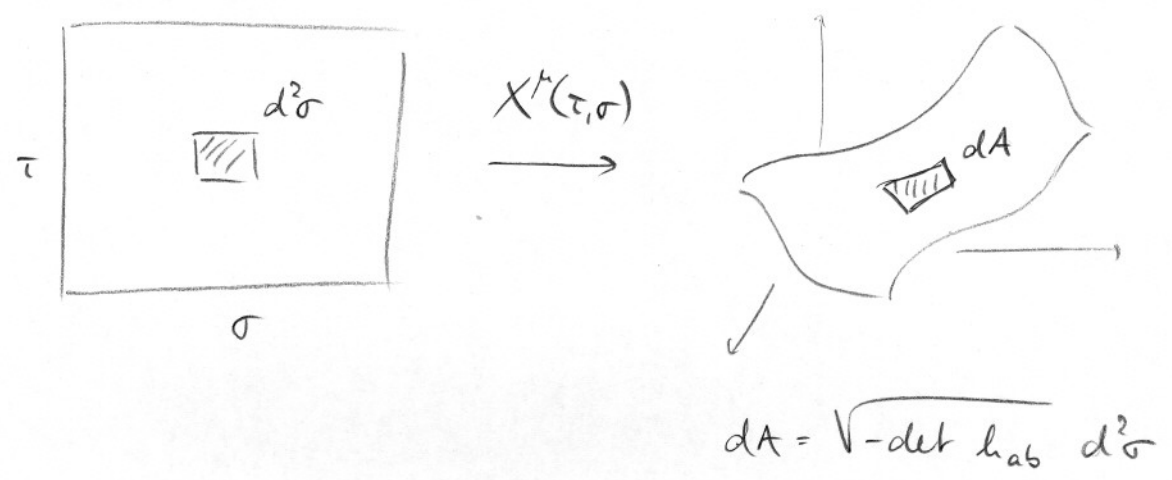
α' : Regge slope

$\alpha' = \ell_s^2$ ← intrinsische Längenskala

In der Wirkung tritt auf die induzierte Metrik auf der Weltfläche bezüglich Einbettung

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

h_{ab} ist gegeben durch "pullback" der flachen Minkowski metrik $\eta_{\mu\nu}$ auf die Weltfläche.



Explizit.

$$S_{NG}[X] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2}$$

mit
$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

Wurzel in der Wirkung ist wieder unpraktisch.
Alternative, klassisch äquivalente Wirkung (besser für Pfadintegrale):

Polyakov - Wirkung

$$S_P[X, \gamma] = -\frac{T}{2} \int dt d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$$

gefunden von - Brink, Di Vecchia, Howe '76
- Deser, Zumino '76

Hier ist $\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$ ein Hilfsfeld: die unabhängige Weltflächenmetrik oder einfach "Metrik" (nicht die induzierte Metrik h_{ab}), ein symmetrisches Tensorfeld vom Rang 2.

γ in S_P ist definiert als

$$\gamma = \det \gamma_{ab}$$

Euler-Lagrange-Gleichung aus Variation von S_P bzgl. γ^{ab} :

$$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0$$

bzw.

$$h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd} = 0$$

Hieraus erhält man

$$h_{ab} (-h)^{-1/2} = \gamma_{ab} (-\gamma)^{-1/2}$$

Benutze dies, um γ^{ab} in Polyakov - Wirkung S_P zu eliminieren \rightarrow erhalte Nambu - Goto - Wirkung S_{NG} .

Die obige Größe

$$T_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu$$

ist der Energie - Impuls - Tensor. Die Bewegungsgleichung ist

$$T_{ab} = 0$$

Diese Bedingungen werden oft als Virasoro - constraints bezeichnet.

Symmetrien der Polyakov - Wirkung

(i) Poincaré - Invarianz

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu$$

$$\gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = \gamma_{ab}(\tau, \sigma)$$

wobei Λ D-dim. Lorentztransf. und a^μ ein D-dim. Vektor.

Außerdem hat S_p zwei lokale „Eichsymmetrien“:

(ii) Reparametrisierungsinvariant

(= Diffeomorphismus - Invariant oder Diff - Invariant)

$$X'^{\mu}(\tau', \sigma') = X^{\mu}(\tau, \sigma)$$

$$\frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{cd}(\tau', \sigma') = \gamma_{ab}(\tau, \sigma)$$

für neue Koordinaten $\sigma'^a(\tau, \sigma)$.

(iii) 2-dimensionale Weyl - Invariant

(hierzu kein Analogon in S_{NG})

$$X'^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu}(\tau, \sigma)$$

$$\gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = e^{2\omega(\tau, \sigma)} \gamma_{ab}(\tau, \sigma)$$

für beliebige Funktion $\omega(\tau, \sigma)$ auf der Weltfläche.

[Beweis: explizit nachrechnen]

Diese Symmetrien erlauben, eine spezielle Eichung zu wählen, in der die drei Funktionen in der symmetrischen 2×2 -Matrix (γ_{ab}) durch eine Funktion ausgedrückt sind. Besonders einfache Wahl ist die konforme Eichung

$$(\gamma_{ab}) = e^{\phi(\tau, \sigma)} (\eta_{ab}) = e^{\phi(\tau, \sigma)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Metrik g_{ab} ist dann "konform flach".
 Auf klassischem Niveau fällt der konforme Faktor e^ϕ heraus. Damit erhält man die Polyakov-Wirkung in konformer Eichung:

$$S[X, e^\phi \eta] = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma (\dot{X}^2 - X'^2)$$

Dazu hat man die Virasoro constraints (Bewegungsgleichungen bzgl. g_{ab}) $T_{ab} = 0$.

\Rightarrow

$$\begin{aligned} T_{01} = T_{10} &= \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \end{aligned}$$

* S_P und S_{NG} beschreiben eine 2-dimensionale Feldtheorie auf der String-Weltfläche. In der Stringtheorie ist die Amplitude für einen Raum-Zeit-Prozess gegeben durch Matrixelemente in einer 2-dimensionalen QFT auf der Weltfläche. Die Wirkung beschreibt eine Feldtheorie für skalare Felder X^μ , kovariant gekoppelt an die Metrik g_{ab} . Dabei ist μ ein Index. So gesehen ist die D-dimensionale Poincaré-Invarianz eine interne Symmetrie bei festem (τ, σ) .

Bewegungsgleichung für den String

Aus Wirkungsprinzip für 1+1-dimensionale Feldtheorie mit obiger Wirkung in konformer Eindung durch Variation bzgl. X^μ :

$$\delta S [X, e^{\phi_2}] = -T \int d\tau d\sigma (\partial^\alpha \partial_\alpha X_\mu) \delta X^\mu + T \int d\tau X'_\mu \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=L}$$

Aus erstem Term erhält man Bewegungsgleichung

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = X''^\mu - \ddot{X}^\mu = 0$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0$$

d.h. wie 2-dim. Wellengleichung.

3) Offene / geschlossene Strings und Entwicklung nach Moden

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Randterm in obigem δS zu behandeln:

- (i) offene Strings mit Neumann-Randbedingungen
- (ii) geschlossene Strings

(i) Offene StringsWähle $\sigma \in [0, \pi]$

Erhalte obige Bewegungsgleichung mittels
"freier Randbedingungen"

$$X'(\tau, 0) = X'(\tau, \pi) = 0$$

Dies sind Neumann-Randbedingungen.

[Bemerkung: Dirichlet-Randbedingungen
 $X(\tau, \sigma)|_{\sigma=0, \pi} = 0$ führen
zu D-Branes]

Mit diesen freien Randbedingungen erhält
man stehende Wellen plus eine inertielle
Bewegung des gesamten Strings.
Mittels Forderung in Schwingungsmoden
erhält man also als allgemeine Lösung

$$X^\mu = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + i l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

wobei l eine Konstante mit Einheit [Länge],
 $l = \sqrt{2\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}$; oft setzt man auch $l=1$.

Freiheitsgrade sind $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu$.

Da X^μ reell

→

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$$

(ii) Geschlossene Strings

Wähle $\sigma \in [0, \pi]$. [Beachte: in vielen Büchern $\sigma \in [0, 2\pi]$]

Erhalte geschlossene Strings durch Identifikation

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi),$$

d.h. die Randtöne fallen weg.

Die allgemeine Lösung für den geschlossenen String ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma)$$

d.h. eine Überlagerung von links- und rechtslaufenden Anteilen. Es ist

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}$$

Beim geschlossenen String treten also 2 Sätze von Oszillator-Koordinaten auf, α_n^μ und $\tilde{\alpha}_n^\mu$.

Reelles X^μ erfordert wieder

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$$

$$\tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^*$$

Beachte: Hier treten typischerweise Lichtkegelkoordinaten $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ auf. Mit $\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm}$ wird die Wellengleichung $\partial_+ \partial_- X^\mu = 0$.

4) Konforme Symmetrie und Virasoro - Operatoren

In Lichtkegelkoordinaten erhält man für den Energie - Impuls - Tensor

$$T_{++} = \frac{1}{2} (T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu$$

$$T_{--} = \frac{1}{2} (T_{00} - T_{01}) = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu$$

und wir haben

$$T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad (\rightarrow \text{Spurfreiheit})$$

und die Virasoro - Constraints

$$T_{++} = T_{--} = 0$$

(Für geschlossene Strings werden diese

$$\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0 \text{ .})$$

Energie - Impuls - Erhaltung in 2-dim. QFT,
 $\nabla^a T_{ab} = 0$, ergibt

$$\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = 0$$

$$\partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} = 0 \text{ .}$$

Mit $T_{+-} = T_{-+} = 0$ erhält man

$$\boxed{\partial_- T_{++} = \partial_+ T_{--} = 0}$$

Hieraus folgt die Existenz von unendlich vielen erhaltenen Größen.

Sei $f(\sigma^+)$ eine beliebige Funktion von σ^+ ,
 d.h. $\partial_- f = 0$. Dann ist $f T_{++}$ ein erhaltener
 Strom, $\partial_- (f T_{++}) = 0$. Daher ist

$$Q_f = \int d\sigma f(\sigma^+) T_{++}$$

eine erhaltene Ladung. Da f beliebig,
 erhält man also unendlich viele erhaltene
 Ladungen. Analoges gilt für T_{--} .

(Beim geschlossenen String sind die erhaltene
 Ladungen gerade $\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0$.)

In anderen Worten: Es gibt eine lokale,
 unendlich-dimensionale konforme Symmetrie

$$\sigma^+ \rightarrow \sigma'^+ = f(\sigma^+)$$

$$\sigma^- \rightarrow \sigma'^- = g(\sigma^-),$$

die nur den konformen Faktor ϕ
 beeinflusst, d.h. die klassische Theorie
 ist invariant unter diesen konformen Transformationen.

Die Weltblatt-Feldtheorie ist daher eine
konforme Feldtheorie (CFT). Die unendlich-
 dimensionale Symmetrie tritt nur in Zwei
 Dimensionen auf.

Der konjugierte Impuls zu X^μ ist $P^\mu = T \dot{X}^\mu$.
 Der Hamiltonian für den String ist dann

$$H = \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^\mu P_\mu - L)$$

$$= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2)$$

Das heißt für den offenen String

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}$$

wobei

$$\alpha_0^\mu = l p^\mu$$

Für den geschlossenen String findet man

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} + \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{n\mu})$$

wobei hier

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} l p^\mu$$

Beachte: unterschiedliche Definition von α_0
 für offene bzw. geschlossene Strings.

Definiere die Virasoro - Operatoren L_m als
Fourier - Komponenten des Energie - Impuls - Tensors
(genommen bei $\tau=0$).

Für offene Strings:

$$L_m \equiv T \int_0^\pi d\sigma (e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--})$$

Ausgedrückt durch die Oszillatoren α_n :

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{n\mu}$$

d.h. insbesondere

$$H = L_0$$

Die Virasoro - constraints implizieren

$$L_m = 0,$$

denn mit T_{++} und T_{--} verschwinden auch die
Fourier - Komponenten.

Für geschlossene Strings:

$$L_m \equiv \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\sigma} T_{--} d\sigma = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\sigma} \dot{X}_R^2 d\sigma$$

$$\tilde{L}_m \equiv \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{++} d\sigma = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} \dot{X}_L^2 d\sigma$$

und ausgedrückt durch die Oszillatoren

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\dagger \alpha_n$$

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}^\dagger \tilde{\alpha}_n$$

Es gilt

$$L_m^* = L_{-m}, \quad \tilde{L}_m^* = \tilde{L}_{-m}$$

Für den geschlossenen String

$$H = L_0 + \tilde{L}_0$$

und hier implizieren die constraints, daß

$$L_0 - \tilde{L}_0 = 0$$

Der Operator $(L_0 - \tilde{L}_0)$ enthält nicht p^\dagger und erzeugt Translationen in σ . Der constraint $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$ bedeutet dann, daß kein Punkt auf dem String ausgezeichnet ist.

Ein String mit vorgegebenen Oszillationen hat die Masse

$$M^2 = -p^\dagger p^\dagger$$

Mit dem constraint $L_0 = 0$ kann man die Masse mit den internen Oszillationsmoden in Verbindung setzen.

Für offene Strings:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$$

und für geschlossene Strings:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n)$$

Warnung: Hierin gibt es in der quantisierten Theorie Modifikationen durch die Nullpunktsenergie, d.h. durch Normalordnung.

Bemerkung:

Mit Poisson-Klammern $\{ \cdot, \cdot \}_{PB}$ gilt die klassische Virasoro-Algebra

$$\{L_m, L_n\}_{PB} = i(m-n) L_{m+n}$$

$$\{\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\}_{PB} = i(m-n) \tilde{L}_{m+n}$$

$$\{L_m, \tilde{L}_n\}_{PB} = 0,$$

wobei die \tilde{L}_m für offene Strings nicht vorhanden sind.

III. Quantisierung des bosonischen Strings

1

Zur Quantisierung des relativistischen Strings gibt es drei Methoden:

- * kovariante kanonische Quantisierung
- * Lichtkegel - Quantisierung
- * Pfadintegral - Quantisierung,

von denen wir nur die ersten beiden behandeln.

Diese unterscheiden sich durch die Weise, in der die Constraints implementiert werden:

- * Bei der kovarianten Quantisierung wird erst ohne Constraints quantisiert, und die Constraints werden dann benutzt, um die physikalischen Zustände zu definieren.
- * Bei der Lichtkegel - Quantisierung implementiert man die Constraints auf dem Niveau der klassischen Lösung und quantisiert dann. Dabei geht jedoch die manifeste Lorentz-Kovarianz verloren, und diese muß a posteriori untersucht werden.

Alle drei Methoden führen zu äquivalenten Resultaten, der Beweis dieser Äquivalenz ist aber oft kompliziert.

1) Quantisierung des Punktteilchens (kovariant)

Die klassische Lösung ist

$$X^\mu(\tau) = x_0^\mu + P^\mu \tau,$$

wobei $P^\mu = \dot{X}^\mu$ der zu X^μ konjugierte Impuls ist.

Bei der Quantisierung ersetzt man Felder und deren konjugierte Impulse durch Operatoren, so daß equal-time Vertauschungsrelationen erfüllt sind, d.h. hier

$$[X^\mu(\tau), P^\nu(\tau)] = i \eta^{\mu\nu}$$

Einsetzen der klassischen Lösung ergibt

$$[x_0^\mu, P^\nu] = i \eta^{\mu\nu}$$

Man definiert dann einen Fock-Raum, auf dem die Operatoren x_0^μ und P^μ wirken.

Wählt man die Impulsdarstellung, so besteht der Fock-Raum aus Zuständen $|k^\nu\rangle$ mit

$$P^\mu |k^\nu\rangle = k^\mu |k^\nu\rangle$$

Der constraint wird dann zu einer Operator-Gleichung: Wir betrachten nur Zustände als physikalisch, für die

$$P^2 |k^\nu\rangle = k^2 |k^\nu\rangle = -m^2 |k^\nu\rangle$$

2) Kovariante Quantisierung des bosonischen Strings

Wir betrachten zunächst offene Strings.

Die equal-time Vertauschungsrelationen für X^μ und den dazu konjugierten Impuls $P^\mu = T\dot{X}^\mu$ sind

$$[X^\mu(\tau, \sigma'), P^\nu(\tau, \sigma)] = i \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}$$

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = 0$$

$$[P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = 0$$

Für die Schwerpunkts- und Oszillatorfreiheitsgrade folgt hieraus (Beweis als Übung):

$$[X^\mu, p^\nu] = i \eta^{\mu\nu}$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m \delta_{m+n, 0} \eta^{\mu\nu}$$

Definiert man $a_m^\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} \alpha_m^\mu$ und $a_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{-n}^\mu$, so erhält man aus der letzten Vertauschungsrelation gerade einen ungedehnten harmonischen Oszillator:

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}$$

Erhalte Hilbertraum für offenen String
 durch Definition eines Grundzustands und
 Anwendung von Aufsteigoperatoren auf diesen.
 Zu den Oszillatorgrundzuständen kommen
 noch die Eigenzustände des Impulsoperators
 → Grundzustand als Produkt dieser Zustände
 → unendlichfach entarteter Grundzustand $|0, k^\nu\rangle$
 mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_m^\dagger |0, k^\nu\rangle &= 0 \quad (m > 0) \\
 p^\dagger |0, k^\nu\rangle &= k^\dagger |0, k^\nu\rangle
 \end{aligned}$$

Erhalte angeregte Zustände durch Aufsteigoperatoren
 α_{-m}^\dagger mit $m > 0$, z.B.

$$\alpha_{-1}^\dagger |0, k^\nu\rangle, \quad \alpha_{-1}^\dagger \alpha_{-1}^\dagger \alpha_{-2}^\dagger |0, k^\nu\rangle, \text{ etc.}$$

Beachte, daß hierbei Gest-Zustände (d.h.
 Zustände mit negativem Norm) auftreten
 können, z.B.

$$\begin{aligned}
 |\alpha_{-1}^0 |0, k^\nu\rangle|^2 &= \langle 0, k^\nu | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 |0, k^\nu\rangle \\
 &= \langle 0, k^\nu | (\alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 - \alpha_{-1}^0 \alpha_1^0) |0, k^\nu\rangle \\
 &= \langle 0, k^\nu | [\alpha_1^0, \alpha_{-1}^0] |0, k^\nu\rangle \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Diese sollten durch constraints $L_m = 0$ vom
 physikalischen Spektrum ausgeschlossen werden.

Um die Quanten-Version des Virasoro-Operators

zu erhalten wende Normalordnung an, d.h. schreibe alle Absteigeoperatoren (Vorfaktor) nach rechts. Es war klassisch

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n,$$

also Normalordnung kein Problem falls $m \neq 0$ (dann nämlich $m-n \neq -n$). Für $m \neq 0$ wende also einfach

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n :$$

Für L_0 tritt ein Problem auf, da α_n^\dagger und α_{-n}^\dagger nicht vertauschen. Wir definieren daher

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$$

müssen aber erwarten, daß bei der Normalordnung konstante Terme auftreten, so daß immer $(L_0 - a)$ mit einer (noch) unbestimmten Konstanten a auftritt.

Man kann zeigen, daß damit die quantenmechanische Virasoro-Algebra der L_m zu

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1) \delta_{m+n,0}$$

wird. Hierbei heißt c die Zentrale Ladung.

Man kann zeigen, daß hier $c = D$.

Aus Virasoro - Algebra folgt: Übernehmen der klassischen Virasoro - constraints $L_m = 0$ (für alle m) als Operator - constraints $L_m |\phi\rangle = 0$ ist nicht möglich, denn sonst

$$0 = \langle \phi | [L_m, L_{-m}] | \phi \rangle \\ = 2m \langle \phi | L_0 | \phi \rangle + \frac{D}{12} m(m^2 - 1) \langle \phi | \phi \rangle \neq 0.$$

[Ähnliches passiert in der QED \rightarrow dort: Gupta - Bleuler - Quantisierung! Hier analoges Vorgehen.]

Maximale constraints, die man hier anwenden kann, sind

$$\boxed{L_{m>0} | \text{phys} \rangle = 0} \\ \boxed{(L_0 - a) | \text{phys} \rangle = 0}$$

Man kann zeigen:

Die Abwesenheit von Geistern im physikalischen Spektrum erfordert $\boxed{D=26}$ und $\boxed{a=1}$.

(No - Ghost - Theorem). $D=26$ ist die kritische Dimension der bosonischen Stringtheorie (siehe hierzu auch unten: Lichtkegelquantisierung)

Erhalte Spektrum des offenen bosonischen
 Strings aus Massenschalenbedingung und
 Constraint $L_0 - a = 0$:

$$\begin{aligned}
 M^2 &= -P^\mu P_\mu \\
 &= -\frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^2 \\
 (L_0 - a = 0) &\rightarrow = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha'} (N - a)
 \end{aligned}$$

wobei

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^+ \cdot a_n$$

$N_n \equiv a_n^+ a_n$ ist üblicher Teilchenzahloperator
 der Oszillatoralgebra mit Eigenwerten $0, 1, 2, \dots$.

Daher hat N Eigenwerte $N = 0, 1, 2, \dots$,
 und N heißt level number.

Mit $a = 1$ ist das Spektrum also

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N - 1)$$

Der Grundzustand $N = 0$ hat

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} < 0$$

ist ein Tachyon!

→ Instabilität bosonischer Stringtheorie!

(Dieses Problem hier nicht weiter behandelt,
 tritt bei Superstrings nicht auf.)

Erstes angeregtes Niveau ist $N=1$, die Zustände hier sind

$$\alpha_{-1}^{\mu} |0, k^{\nu}\rangle$$

und sind masselos, $M^2=0$. Diese bilden (Index μ) einen Vektor unter Lorentz-Transformationen.

→ masseloses Vektorfeld = "Photon".

Wähle Polarisationsvektor ξ_{μ} → schalte allgemeinen Zustand mit level number 1

$$|\xi, k^{\nu}\rangle = \xi \cdot \alpha_{-1} |0, k^{\nu}\rangle$$

Aus constraint $L_1 |\xi, k^{\nu}\rangle = 0$ folgt transversale Polarisation, $\xi \cdot k = 0$, denn

$$\begin{aligned} 0 = L_1 |\xi, k^{\nu}\rangle &= \sqrt{2\alpha'} (k \cdot \alpha_{-1}) (\xi \cdot \alpha_{-1}) |0, k^{\nu}\rangle \\ &= \sqrt{2\alpha'} (k \cdot \xi) |0, k^{\nu}\rangle \end{aligned}$$

[Bemerkung: Dieser Zustand $|\xi, k^{\nu}\rangle$ erfüllt die beiden constraints $k^2 = \pi^2 = 0$ und $k \cdot \xi = 0$, und hat $D-2 = 24$ Polarisationen. Siehe hierzu auch unten, Lichtkegelquantisierung.]

Es gibt (unendlich viele) höher angeregte Zustände ($N \geq 2$), die alle massiv sind.

Jetzt zu geschlossenen Strings, Vorgehen analog.
 Hier gibt es zusätzliche Auf- und Absteigeoperatoren mit Vertauschungsrelationen

$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu}$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0$$

Jetzt zwei constraints für physikalische Zustände

$$\left. \begin{aligned} (L_0 - a) |phys\rangle &= 0 \\ (\tilde{L}_0 - a) |phys\rangle &= 0 \end{aligned} \right\}$$

oder äquivalent (durch addieren bzw. subtrahieren)

$$(L_0 + \tilde{L}_0 - 2a) |phys\rangle = 0$$

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |phys\rangle = 0$$

$H = L_0 + \tilde{L}_0 - 2a$ ist der Hamiltonian, die erste Bedingung also die Massenskalenbedingung, der zweite constraint besagt, daß kein Punkt auf dem geschlossenen String ausgezeichnet ist.

Die Massenformel für geschlossene Strings ist mit $\alpha = 1$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) - 2 \right)$$

Da aber

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} l_p^\mu$$

ist

$$L_0 = \tilde{L}_0.$$

→ Die Beiträge von rechts- und linkslaufenden Anregungen zu M^2 sind gleich.

Also

$$\boxed{M^2 = \frac{4}{\alpha'} (N-1)}$$

mit $N = \tilde{N}$.

In anderen Worten: Die Gewichte der links- und rechtslaufenden Oszillationen müssen gleich sein, und wir können nur Zustände erzeugen, die dies erfüllen.

Der Grundzustand hat $(N=0)$

$$M^2 = -\frac{4}{\alpha'} < 0$$

und ist wieder ein Tachyon.

→ Auch geschlossenes bosonisches Stringvakuum ist instabil!

Das erste angeregte Niveau ($N = \tilde{N} = 1$)
besteht aus Zuständen

$$\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0, k^{\nu}\rangle,$$

und diese sind masselos.

Beachte, daß sich die Zustände des
geschlossenen Strings als Tensorprodukt
von Zuständen zweier offener Strings
auffassen lassen,

$$|\xi, k^{\nu}\rangle = \xi_{\mu\nu} (\alpha_{-1}^{\mu} |0, k^{\nu}\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0, k^{\nu}\rangle)$$

Der Polarisationstensor $\xi_{\mu\nu}$ enthält drei
verschiedene Spin-Zustände. Zerlegung
in verschiedene Darstellungen der transversalen
Drehgruppe $SO(24)$ gemäß

$$24 \otimes 24 = S \oplus A \oplus 1$$

↑
Vektordarstellung 24 der $SO(24)$
in symmetrischen, spurfreien Anteil,
antisymmetrischen Anteil und triviale
Darstellung ergibt

$$\xi_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}] + [B_{\mu\nu}] + [\eta_{\mu\nu} \Phi].$$

Die Interpretation dieser Spinzustände
(bzw. Darstellungen) ist:

* symmetrischer, spurfreier Tensor $g_{\mu\nu}$
 \longleftrightarrow Gravitonfeld

* antisymmetrischer Tensor $B_{\mu\nu}$
 \longleftrightarrow Neveu-Schwarz B-Feld

* skalares Feld $\Phi \longleftrightarrow$ Dilaton

[Bemerkung: die 'String-Kopplungskonstante'
 g_s wird durch den VEV des
 Dilatons bestimmt, $g_s = \langle e^{\Phi} \rangle$.]

3) Lichtkegel-Quantisierung des bosonischen Strings

Vorgehen: Zunächst klassische Constraints lösen,
 dann nur die verbleibenden
 physikalischen Freiheitsgrade quantisieren.

Definiere hierzu Lichtkegel-Koordinaten
 in der Raum-Zeit (nicht zu verwechseln
 mit σ^\pm auf dem Weltblatt!)

$$\begin{aligned} X^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 + X^{D-1}) \\ X^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 - X^{D-1}) \end{aligned}$$

Hierbei geht manifeste Lorentz-Invarianz verloren, da zwei von 3 Richtungen ausgefallen (im Gegensatz zu σ^\pm : auf dem Weltblatt gibt es nur zwei Richtungen!).

Dafür gewinnt man manifeste Abwesenheit von Geistern.

Wir betrachten hier offene Strings, geschlossene analog.

Nach Wahl der konformen Eichung hatten wir noch eine verbliebene Invarianz unter Reparametrisierungen,

$$\sigma^+ \rightarrow \sigma'^+(\sigma^+)$$

$$\sigma^- \rightarrow \sigma'^-(\sigma^-)$$

Darunter transformiert sich

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{1}{2} [\sigma'^+(\tau+\sigma) + \sigma'^-(\tau-\sigma)]$$

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \frac{1}{2} [\sigma'^+(\tau+\sigma) - \sigma'^-(\tau-\sigma)]$$

d. h. τ' ist beliebige Lösung der freien masselosen Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \right) \tau' = 0$$

Ist τ' gewählt, ist aber σ' festgelegt.

Die Wellengleichung wird erfüllt durch die $X^+(\tau, \sigma)$ (in konformer Eichung).

→ natürliche Wahl für τ' : eines der X^+ .

In Lichtkegel-Eichung wählt man dies für X^+ ,

d.h. $\tau' = X^+ / p^+ + \text{const.}$ In anderen Worten:

man wählt τ so, daß

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + p^+ \tau$$

Verbliebene Eichfreiheit wurde also genutzt, um die $\alpha_n^+ = 0$ zu setzen für $n \neq 0$.

Die Virasoro constraints $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ werden dann zu

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^i \pm X'^i)^2$$

für $i = 1, \dots, D-2$. Wir erhalten also X^- als Funktion der X^i . Damit können wir auch die α_n^- eliminieren. Es verbleiben nur noch $D-2$ Sätze von Oszillatoren, und nur diese werden quantisiert.

Physikalische Erklärung hierfür ist, daß
Oszillationen in den zwei Richtungen der
Weltfläche nur Reparametrisierungen darstellen
und von außen nicht sichtbar, d.h.
unphysikalisch sind.

Mit Modenentwicklung

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

erhalte

$$\alpha_m^- = \frac{1}{p^+} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n}^i \alpha_n^i : - a \delta_{m,0} \right)$$

wobei a unbekannte Konstante durch
Normalordnung.

In Lichtkegel-Eichung wird $\alpha_0^- = p^-$ die
Massenschalenbedingung. Für $m=0$ nämlich

$$\begin{aligned} M^2 &= 2p^+p^- - p^i p^i \\ &= 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a \right) \\ &= 2(N - a) \end{aligned}$$

und nur transversale Oszillationen tragen
zu N bei.

[Bemerkung: $(p^+ \alpha_n^-)$ erfüllen Virasoro-Algebra]

In Lichtkegel-Eichung werden alle angeregten Zustände durch transversale Oszillatoren α_{-n}^i erzeugt. \rightarrow Zustände im ersten angeregten Niveau:

$$\alpha_{-1}^i |0, k^\nu\rangle$$

Dies entspricht einer $(D-2)$ -dim. Vektorzerlegung.

Allgemein: massive Vektorfelder haben $D-1$ Polarisationen (invariant unter $SO(D-1)$), masselose dagegen nur $D-2$! (invariant unter $SO(D-2)$).

\rightarrow Lorentz-Invarianz erfordert $k^2=0$ für erstes angeregtes Niveau, also

$$\boxed{a=1}$$

Die Konstante a ergibt sich durch Normalordnung:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

d.h. die konstante Term ist

$$\boxed{a = -\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n}$$

Dies ist die Casimir-Energie. Jeder Oszillator trägt eine Grundzustandsenergie $\frac{1}{2}$ bei, und es gibt $D-2$ unabhängige Polarisationen.

Die Summe in a ist divergent.

→ Benutze ζ -Funktionsregularisierung: Es ist

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

die Riemannsche ζ -Funktion, mit wohldefinierter analytischer Fortsetzung für $\text{Re } z \leq 1$, wobei

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad \text{Damit}$$

$$a = -\frac{D-2}{2} \zeta(-1) = \frac{D-2}{24}$$

Aus $a=1$ folgt also

$$D = 26,$$

die kritische Dimension bosonischer Stringtheorie.

Bemerkung: Andere Möglichkeit, die kritische Dimension $D=26$ herzuleiten, ist Weyl-Anomalie: In der Quantentheorie wird Weyl-Invarianz gebrochen, wenn nicht $D=26$. Z.B. in

Pfadintegral-Formulierung: Faddeev-Popov-Ghost tragen zentrale Ladung -26 bei, die gerade durch die zentrale Ladung für die X^μ weggehoben wird, wenn $D=26$.

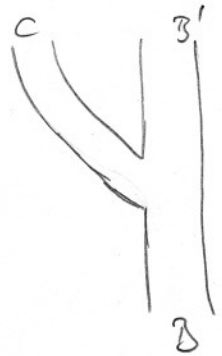
IV. Streuung bosonischer Strings: Baumgraphen

1) Wechselwirkung und Vortexoperatoren

Bisher: keine Wechselwirkung betrachtet, nur Störung ($\hat{=}$ Anregungen) um ein "Vakuum", das aber Grundzustand eines einzelnen Strings war. Uns interessiert jetzt: mehrere Strings und deren Wechselwirkung.

Dazu nicht möglich: höhere Terme in der Lagrange dichte (wie in QFT). Das ergäbe komplizierteste Theorie auf Weltfläche, aber eben auf Weltfläche eines Strings.

Einfachste Wechselwirkung offener Strings:



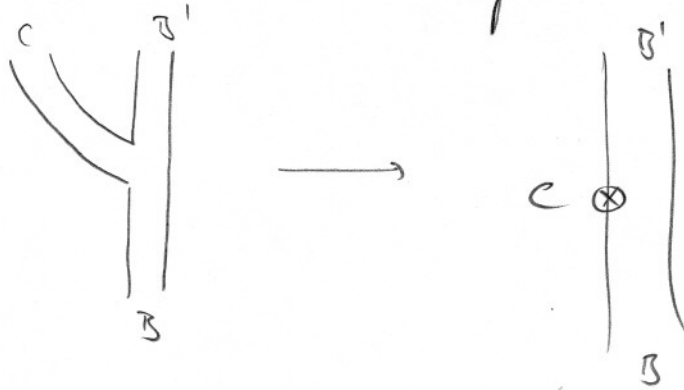
← String emittiert einen anderen

Möglichkeit: Randbedingungen finden, diese Weltfläche parametrisieren & quantisieren.

Es gibt aber bessere Möglichkeit (besonders für Baumgraphen). Dafür wichtig: konforme Invarianz!, d.h. Eichfreiheit

$$\begin{aligned} \sigma^+ &\rightarrow f(\sigma^+) \\ \sigma^- &\rightarrow g(\sigma^-) \end{aligned}$$

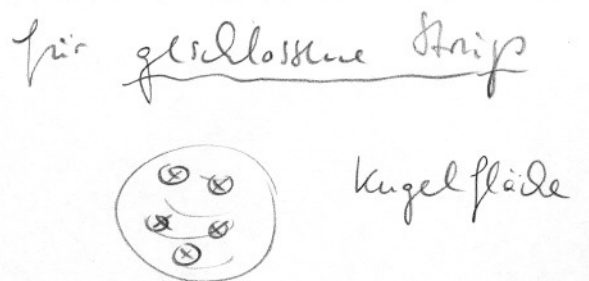
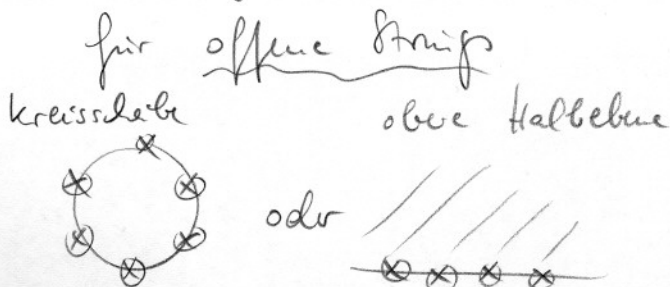
Diese Reparametrisierung bedeutet Änderung der Koordinaten und der Metrik, also eine "Verformung der Weltfläche". Dabei gibt es drastische Möglichkeiten, z.B.



wobei äußerer Zustand C auf Punkt der Weltfläche des anderen Zustands kontrahiert. Dieser Punkt entspricht Punkt im Unendlichen des ursprünglichen Zustands.

Dasselbe funktioniert auch für mehrere äußerer Zustände: alle äußerer Zustände können auf Punkte auf dem Rand kontrahiert werden. Dann ergibt sich bei

Baumgraphen:



Es sind auch gemischte (offen/geschlossen) Anordnungen möglich.

Wir suchen Wahrscheinlichkeitsamplitude für Streuprozeß. In QR wählt man

$$A = \langle \psi_{in} | \psi_{out} \rangle$$

(beachte, daß wir hier andere Konvention wählen als in QR üblich).

Hier haben wir zusätzlichen Zustand C
 → finde zusätzlichen Operator, der Zustand nach Emission auf Zustand vor Emission abbildet. Damit

$$A = \langle B | V_C(\tau, \sigma) | B' \rangle$$

Erwarte, daß V_C von Position des äußeren Zustands C abhängt.

Bei offenem Strich ist Emission von Zuständen nur am Rand möglich, d.h.

$$\sigma \in \{0, \pi\}.$$

Wir wählen, falls nicht anders nötig, $\sigma = 0$.

V_C wird auch von Zustand C abhängen.
 Einfachste Möglichkeit: Tachyon. Dieses hat nur Impuls als Freiheitsgrad. V_C kann für Tachyon mit Impuls k_C also nur den Impuls von B um k_C ändern.

Dies bewirkt gerade der Operator $e^{ik_c \cdot x(\tau, \sigma)}$,
wobei $x^{\mu}(\tau) = x^{\mu} + l^2 p^{\mu} \tau$ (Wir setzen oft $l=1$.)

(vgl. Impulsoperator für Translationen).

→ Wähle für Vortexoperator $e^{ik_c \cdot X(\tau, \sigma)}$ mit
Normalordnung, d. h. wir haben für ein
Teilgen C den Vortexoperator

$$V_C(\tau, \sigma) = : e^{ik_c^{\mu} X_{\mu}} :$$

$$= e^{ik_c^{\mu} (x_{\mu} + l^2 p_{\mu} \tau)} \exp \left[i l k_c^{\mu} \sum_{n < 0} \frac{1}{n} \alpha_{n\mu} e^{-i n \tau} \cos n \sigma \right] \\ * \exp \left[i l k_c^{\mu} \sum_{n > 0} \frac{1}{n} \alpha_{n\mu} e^{-i n \tau} \cos n \sigma \right]$$

(Beachte, daß für Operatoren i. a. $e^A e^B \neq e^{A+B}$).

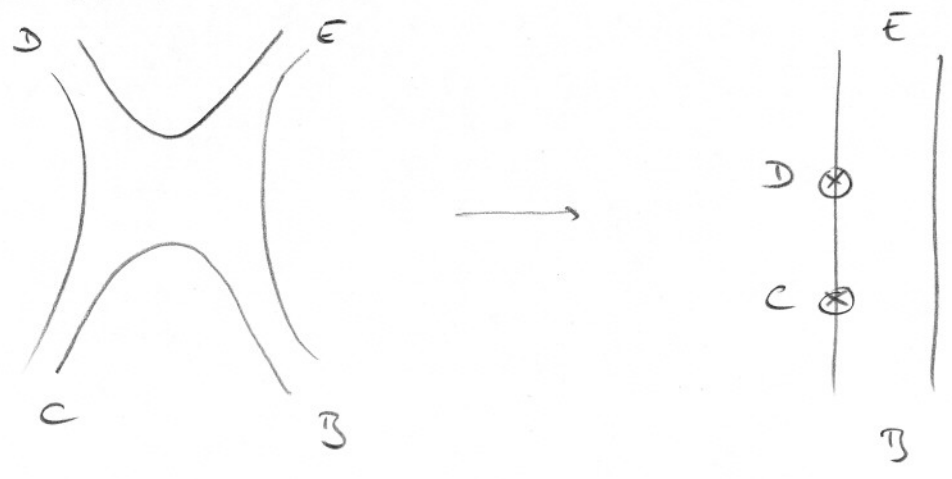
→ Erhalte Amplitude

$$\left\langle \begin{array}{c} \mathbb{B}' \\ | \\ C \\ | \\ \mathbb{B} \end{array} \right\rangle \approx A = \langle \mathbb{B} | V_C(0,0) | \mathbb{B}' \rangle$$

Beachte hier $\sigma=0$ (s.o.) und die Wahl
 $\tau=0$, die wegen Invarianz unter Zeittranslationen
möglich ist.

Für mehrere äußere Zustände kann man
ein Vortexoperator bei $\tau=0$ fixieren.

Also z. B.



$$\rightarrow A = \int_0^\infty d\tau \langle B | V_C(0,0) V_D(\tau,0) | E \rangle$$

Für höher angeregte Zustände sind andere Vertexoperatoren nötig. z. B. für Photon des offenen Strings: wieder $e^{ik \cdot X}$ für Impuls, aber zusätzlich hat man Polarisationsvektor ξ^μ . Richtige Wahl:

Vertexoperator für Photon (offene String):

$$V_{\text{photon}} = : \xi^\mu \dot{X}_\mu e^{ik \cdot X} : \quad \text{mit } k \cdot \xi = 0$$

Bemerkung: ähnlich beim zweiten angeregten Niveau

$$: \xi^{\mu\nu} \dot{X}_\mu \dot{X}_\nu e^{ik \cdot X} : \quad \text{etc.}$$

Für geschlossene Strings hat man Vertexoperatoren für Tachyonen $V = : V(k, \tau, \sigma) :$ mit

$$V(k, \tau, \sigma) = V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau - \sigma\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau + \sigma\right)$$

↑
Impuls d. einheitlichen Zustands

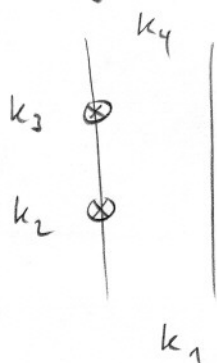
mit $V_{L,R} = e^{ik \cdot X_{L,R}}$

Geschlossene Strings können nicht nur am Rand einheitlich werden. \rightarrow Integriere über σ , d.h. verwende $V = : V^{\text{closed}} :$ mit

$$V^{\text{closed}}(k, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau - \sigma\right) V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau + \sigma\right)$$

2) 2-Tachyon-Streumplitude

Wir betrachten als einfachsten Prozess Tachyon-Tachyon-Streuung,



← Beide Zustände bei $\sigma=0$ einheitlich, Ergebnis ist davon aber unabhängig (vollst. Bose-Symmetrie).

Wir zählen einlaufende Impulse positiv, also

$$A = \int_0^\infty d\tau \langle 0, k_1 | : e^{ik_2^\mu X_\mu(0,0)} :: e^{ik_3^\nu X_\nu(\tau,0)} : | 0, -k_4 \rangle.$$

Einsetzen der Vertexoperatoren mit jeweils drei Exponentialfunktionen (s.o.) ergibt 6 Faktoren. Im letzten Faktor treten nur Vernichtungsoperatoren auf, so daß dieser Faktor angewandt auf $|0, -k_4\rangle$ 1 ergibt, ähnliches gilt für den linken Faktor, der nur Erzeugungsoperatoren enthält.

Es bleibt

$$A = \int_0^{\infty} d\tau \langle 0, k_1 | e^{ik_2^\mu x_\mu} \overset{\tau=0}{\exp\left[ik_2^\mu \sum_{n>0} \frac{1}{n} \alpha_{n\mu} \right]} \times \\ \times \exp\left[ik_3^\nu \sum_{m<0} \frac{1}{m} \alpha_{m\nu} e^{-im\tau} \right] e^{ik_3^\nu (x_\nu + p_\nu \tau)} |0, -k_4\rangle$$

wobei benutzt ist, daß der dritte und vierte Faktor kommutieren.

Im folgenden benutzen wir die Konvention

$\alpha^1 = \frac{1}{2}$ und damit $k^2 = -2$ für ein Teilchen.

Im letzten Faktor ist wieder $e^{A+B} \neq e^A e^B$, stattdessen erhält man durch Ausdehnen der Potenzreihe

$$e^{ik \cdot (x+p\tau)} = e^{ikx} e^{i(k \cdot p + 1)\tau}$$

$|0, -k_4\rangle$ ist Eigenzustand zu p , und e^{ikx} ändert den Impuls um $-k$. Analog für den ersten Faktor.

Also

$$A = \int_0^{\infty} dt e^{i(k_3^v k_4^v + 1)\tau} \langle 0, k_1 + k_2 | \exp \left[ik_2^h \sum_{n>0} \frac{1}{n} \alpha_{n\mu} \right] \times \\ \times \exp \left[ik_3^v \sum_{m<0} \frac{1}{m} \alpha_{m\nu} e^{-im\tau} \right] | 0, -k_3 - k_4 \rangle$$

Um die Erzeugungsoperatoren nach links zu tauschen benutzen Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$$

und den Kommutator

$$\left[ik_2^h \sum_{n>0} \frac{1}{n} \alpha_{n\mu}, ik_3^v \sum_{m<0} \frac{1}{m} \alpha_{m\nu} e^{-im\tau} \right] = \\ = -k_2^h k_3^v \sum_{\substack{n>0 \\ m<0}} \frac{e^{-im\tau}}{mn} [\alpha_{n\mu}, \alpha_{m\nu}] \\ = k_2^h k_3^v \sum_{n>0} \frac{e^{in\tau}}{n}$$

Die Summe über n wird allgemein

$$\sum_{n>0} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

Damit keine Operatoren mehr im Integral.

Da Zustände orthogonal:

$$A = \int_0^{\infty} dt e^{i(k_3 \cdot k_4 + 1)\tau} (1 - e^{i\tau})^{k_2 \cdot k_3} \underbrace{\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}$$

Impulserhaltung,
in Formel unten
weglassen.

Aus der δ -Funktion und $k^2 = -2$

$$\begin{aligned} k_3 \cdot k_4 &= \frac{1}{2} (k_3 + k_4)^2 + 2 \\ &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2)^2 + 2 \\ &= k_1 \cdot k_2 \end{aligned}$$

mit Wick-Rotation und Variablentransformation

$$x = e^{-\tau} \quad (d\tau = -\frac{dx}{x})$$

erhalte

$$A = \int_0^1 dx \, x^{k_1 k_2} (1-x)^{k_2 k_3}$$

mit Mandelstam-Variablen

$$s = (k_1 + k_2)^2$$

$$t = (k_2 + k_3)^2$$

wird das

$$A = \int_0^1 dx \, x^{-\frac{1}{2}s-2} (1-x)^{-\frac{1}{2}t-2}$$

Setze $\alpha(s) = 1 + \frac{1}{2}s \rightarrow$ erhalte Integraldarstellung der Euler-Beta-Funktion,

$$A = B(-\alpha(s), -\alpha(t))$$

$$= \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}$$

d.h. gerade die Veneziano-Amplitude

Das Analogon für geschlossene Strings ist die Virasoro - Shapiro - Amplitude

$$\tilde{\mathcal{B}}\left(-\frac{1}{2}\alpha(s), -\frac{1}{2}\alpha(t), -\frac{1}{2}\alpha(u)\right)$$

mit Trajektorien für geschlossene Strings

$$\alpha(s) = \frac{1}{4}s + 2 \quad \text{etc.}$$

womit

$$\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = -2,$$

und mit

$$\tilde{\mathcal{B}}(a, b, c) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a+b) \Gamma(b+c) \Gamma(a+c)}$$

3) Chan - Paton - Faktoren

Bei offenen Strings sind zwei Punkte ausgezeichnet, $\sigma = 0, \pi$. (Diese sind bei orientierten Strings verschieden.)

→ Möglichkeit einer nicht-abelschen Verallgemeinerung der offenen Strings!

Platzige Ladungen („Quarks“) an den Enden mit Indizes $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Darauf wirke Gruppe $U(N)$, wobei Ladung bei $\sigma = 0$ in fundamentaler Darstellung N sei, die bei $\sigma = \pi$ in antifundamentaler Darstellung \bar{N} .

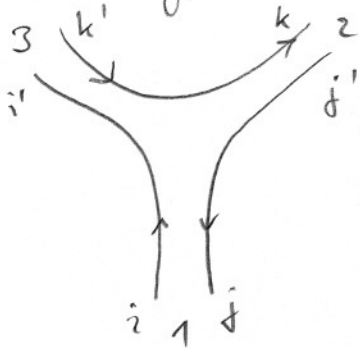
Diese Ladungen heißen Chan-Paton-Freiheitsgrade.
(Ursprung dieser Idee: Strings für starke Wechselwirkung.)

Damit werden offene Strings zu $N \times N$ Matrizen, die in N^2 -dimensionaler adjungierter Darstellung der $U(N)$ transformieren. Die Zustände des Strings sind dann

$$|4\rangle \otimes \lambda_{ij}$$

↑
Oszillatoren

Amplituden erhalten zusätzlichen Faktor, der besagt, daß die Quark-Indizes entlang der Ränder gleich bleiben sollen, z. B.



ergibt zusätzlichen Chan-Paton-Faktor

$$\delta^{ii'} \delta^{jj'} \delta^{kk'} \lambda_{ij}^1 \lambda_{jk}^2 \lambda_{ki'}^3 = \text{tr}(\lambda^1 \lambda^2 \lambda^3)$$

für 3-Punkt-Amplitude.

Diese Faktoren sind invariant unter globalen $U(N)$ -Transformationen auf der Weltfläche. In der Raum-Zeit (also in D Dimensionen) kann dies als $U(N)$ -Eichsymmetrie interpretiert werden, und die masselosen Vektorzustände im Stringspektrum entsprechen dann den Eichbosonen der nicht-abelschen $U(N)$ -Eichsymmetrie.

Bemerkung: Im Zusammenhang mit D -branes haben die Chan-Paton-Indizes die natürliche Interpretation als Indizes verschiedener D -branes.

V Grundzüge der konformen Feldtheorie

Amplituden in Stringtheorie sind durch zweidimensionale Feldtheorie auf der Weltfläche bestimmt, und auf dieser gibt es konforme Invariant

→ 2-dimensionale konforme Feldtheorie (CFT)
von zentraler Bedeutung für Stringtheorie!

CFT, insbesondere in 2 Dimensionen, ist aber auch in anderen Bereichen der Physik sehr wichtig: z.B. statistische Mechanik, Systeme am kritischen Punkt etc.

Es gibt daher einen sehr weit entwickelten Formalismus für CFT. Wir wollen uns hier auf einige Grundbegriffe und die zugehörige Notation beschränken, für weitere Details, Anwendungen etc. siehe z.B. P. Ginsparg, 'Applied Conformal Field Theory', hep-th/9108028.

Wir folgen in diesem Kapitel der für CFT üblichen Notation, die nicht immer mit der in den anderen Kapiteln übereinstimmt.

1) Komplexe Koordinaten

Benutze euklidische Zeit,

$$\sigma^2 = i\sigma^0 = ic$$

und benutze also Koordinaten σ^1, σ^2 .

Wir wählen hier $\sigma^1 = \sigma \in [0, \frac{2\pi}{\tau}]$

Mit euklidischer Zeit haben wir positive Weltflächenmetrik

$$ds^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2$$

Wir führen ein komplexe Weltflächenkoordinaten

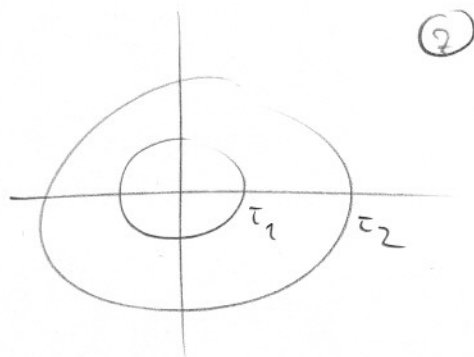
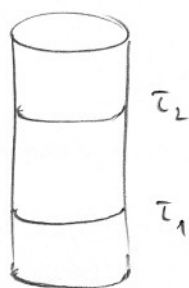
$$w = \sigma^1 + i\sigma^2$$

$$\bar{w} = \sigma^1 - i\sigma^2$$

Eine wichtige Transformation ist

$$z = e^{-iw} = e^{-i\sigma^1 + \sigma^2} = z^1 + iz^2,$$

wobei z.B. geschlossene String - Weltfläche (d.h. der Zylinder) auf komplexe Ebene abgebildet wird:



Linien konstanten $\sigma^2 \rightarrow$
 $\tau \rightarrow -\infty$

Kreise um Ursprung
 Ursprung

→ „Zeit läuft radial nach außen“ in z -Ebene

Ableitungsoperatoren für diese Koordinaten sind

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2)$$

$$\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_1 + i\partial_2)$$

mit

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \quad \text{etc.}$$

Vektoren (oder allg. Tensoren) mit Indizes oben transformieren wie die Koordinaten:

$$A^\alpha = (A^1, A^2) \rightarrow (A^z, A^{\bar{z}}) = (A^1 + iA^2, A^1 - iA^2),$$

solche mit Indizes unten wie die Ableitungen:

$$A_\alpha = (A_1, A_2) \rightarrow (A_z, A_{\bar{z}}) = \frac{1}{2} (A_1 - iA_2, A_1 + iA_2)$$

Ableitungen in alten Koordinaten (d.h. H und P) werden in neuen Koordinaten

$$H \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} = z \partial_z + \bar{z} \partial_{\bar{z}} \quad (\text{Hamiltonian})$$

$$P \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma} = z \partial_z - \bar{z} \partial_{\bar{z}} \quad (\text{Impuls entlang d. Strings})$$

Bemerkung: Es ist in CFT oft günstig, z und \bar{z} als unabhängige Variablen aufzufassen und erst am Schluß die Bedingung $\bar{z} = z^*$ zu benutzen.

2) Freies skalares Feld

Bosonischer String in D Dimensionen entspricht D freien skalaren Feldern auf 2-dim.

Weltfläche, auf der es zusätzlich konforme Invarianz. \rightarrow Metrik entkoppelt (wir können lokal flache Metrik wählen).

Betrachte euklidisches skalares Feld $x(z, \bar{z})$ in komplexer Notation. Wirkung hierfür (vgl. String):

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial x \bar{\partial} x$$

\uparrow

$$d^2z = dz_1 dz_2$$

Beachte: hierin wird oft ein Faktor 2 oder $\frac{1}{2}$ hinein definiert.

Mit unserer Wahl ist $d^2(z) = \frac{1}{2} dz d\bar{z}$

Dies entspricht der Wirkung für eine der Komponenten von X^μ .

Wir setzen in diesem Kapitel $\alpha' = 2$ (zur Vereinfachung).

Aus dieser Wirkung erhält man die Bewegungsgleichung

$$\bar{\partial} \partial x = 0$$

Diese ist erfüllt für Funktionen, die nur von z oder \bar{z} abhängen.

→ Allgemeine Lösung:

$$x = x_L(z) + x_R(\bar{z})$$

In Minkowski-Signatur entspricht dies:

x_L ist Funktion von $\tau + \sigma$

x_R " " " " $\tau - \sigma$,

daher die Indizes L, R.

Die üblichen Bezeichnungen in der CFT sind:

$z(\bar{z})$ ist holomorphe (antiholomorphe) Koordinate

x_L sind left-mover bzw. holomorphe Felder

x_R sind right-mover bzw. antiholomorphe Felder

Aus $\bar{\partial}(\partial x) = 0$ folgt, daß $\partial x = \partial x_L$ holomorph ist. ∂x kann also als Laurent-Reihe ausgedrückt werden:

$$i \partial x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1}$$

Mit Cauchy-Formel daraus

$$\alpha_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^n i \partial_x(z),$$

wobei C geschlossener Weg um Ursprung, \oint_C ,
der keine weiteren Singularitäten einschließt.

Durch hermitesch konjugieren:

$$\alpha_n^+ = \alpha_{-n}$$

Man erhält (wie gehabt) Vertauschungsrelationen

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n \delta_{n+m, 0}$$

Genauso gilt für die right-movers:

$$-i \bar{\partial}_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n \bar{z}^{-n-1}$$

Definiere den Impulsoperator (wie beim String)

$$\hat{p} = \alpha_0 = \bar{\alpha}_0$$

Dieser ist kein Auf- bzw. Absteigeoperator.

Wie gehabt ist der Grundzustand

$$|0, p\rangle \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{R}$$

mit

$$\alpha_n |0, p\rangle = \bar{\alpha}_n |0, p\rangle = 0 \quad \text{für} \quad n > 0$$

$$\alpha_0 |0, p\rangle = p |0, p\rangle$$

Erhalte Hilbertraum als Fock-Raum mit Zuständen der Form

$$|\phi\rangle = \alpha_{-n_1} \dots \alpha_{-n_r} \bar{\alpha}_{-m_1} \dots \bar{\alpha}_{-m_s} |0, p\rangle$$

mit $n_i, m_j > 0$.

3) Konforme Transformationen, Virasoro-Algebra

Euklidische Metrik in komplexen Koordinaten ist

$$ds^2 = 2 dz d\bar{z}.$$

Konforme Transformationen sind definiert als solche, die diese Metrik durch einen positiven, z, \bar{z} -abhängigen Faktor reskalieren:

$$ds^2 \rightarrow e^{\phi(z, \bar{z})} ds^2$$

Diese sind gerade die holomorphen Abbildungen

$$z \rightarrow z' = f(z)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z})$$

In infinitesimal werden konforme Transformationen erzeugt durch holomorphe Vektorfelder $\xi^z(z)$, $\xi^{\bar{z}}(\bar{z})$:

$$z \rightarrow z + \delta z$$

mit

$$\delta z = \xi(z), \quad \partial_{\bar{z}} \xi = 0,$$

und ähnlich für \bar{z} .

Allgemein: Bedingung an Vektorfeld ξ^k für konforme Transformationen in $d=2$ Dimensionen
 \rightarrow Cauchy-Riemann-Dgl. für $\xi = \xi^1 + i\xi^2$,
 d. h. ξ ein holomorphes Vektorfeld.

Lorent-Entwicklung für ξ ist

$$\xi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^{-n+1}$$

Hiervaus folgt, daß

$$l_n(z) = z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{l}_n(\bar{z}) = \bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}$$

eine Basis der holomorphen Vektorfelder (Erzeugenden) dieser Transformationen bilden.

Diese Operatoren erfüllen

$$[l_m, l_n] = -(m-n) l_{m+n}$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = -(m-n) \bar{l}_{m+n}$$

$$[l_m, \bar{l}_n] = 0.$$

Definiere ein primäres Feld $\phi(z, \bar{z})$ mit konformem Gewicht (h, \bar{h}) als eines, das sich unter konformen Transformationen $\begin{pmatrix} z \rightarrow f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \end{pmatrix}$ transformiert als

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow (\partial f)^h (\bar{\partial} \bar{f})^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z}))$$

Beachte: \bar{h} ist nicht identisch mit h^* .

Bemerkung: Infinitesimal transformiert sich primäres Feld unter Vektor-Feld $\xi(z)$ als

$$\delta_{\xi} \phi(z, \bar{z}) = [\xi(z) \partial_z + h \partial_z \xi(z)] \phi(z, \bar{z}) \quad \square$$

$\Delta = h + \bar{h}$ ist die Skalen-Dimension:

Unter Reskalierung erhält man

$$\phi(z) \rightarrow e^{\lambda \Delta} \phi(e^{\lambda} \cdot z) \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+)$$

Es muß sein $\Delta \in \mathbb{R}$.

$s = h - \bar{h}$ ist der 2-dim Spin:

Unter Drehung erhält man

$$\phi(z) \rightarrow e^{i s \theta} \phi(e^{i \theta} z) \quad (\theta \simeq \theta + 2\pi)$$

Eindeutigkeit des Feldes unter 2π -Rotation erfordert

$$s = h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$$

Falls $\bar{h}=0$, so ist $h \in \mathbb{Z}$ und es ist $\phi = \phi(z)$ holomorph. Für ϕ gilt dann die Entwicklung

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-h}$$

In $w = \sigma^1 + i\sigma^2$ ausgedrückt, mit $z = e^{-iw}$,

$$\phi(w) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{in\sigma^1 - n\sigma^2},$$

wobei die ϕ_n die Fourier-Moden auf dem Kreis sind. $n < 0$ entspricht einer Mode mit positiver Energie $-n$.

Beispiele für primäre Felder:

∂x ist primäres Feld mit Gewicht $(1,0)$

$\bar{\partial} x$ " " " " " $(0,1)$.

Man definiert dann in 2-dim. Feldtheorie den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$.

T ist symmetrisch,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$

und hat also drei unabhängige Komponenten

$$T_{zz} \equiv T, \quad T_{z\bar{z}}, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}$$

Wegen konformer Invarianz ist T spurfrei,
 $T^\mu{}_\mu = 0$, in komplexen Koordinaten impliziert
 das

$$\boxed{T_{+\bar{z}} = 0}$$

Translationsinvarianz (\Leftrightarrow Impulserhaltung)
 erfordert

$$\boxed{\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\partial} T = 0, \quad \partial \bar{T} = 0}$$

In einer 2-dim. CFT ist demzufolge

$$\boxed{T = T_{zz} \text{ holomorphes Feld}} \quad !$$

Für $T(z)$ gilt also eine Laurent-
 Entwicklung

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad L_n^+ = L_{-n},$$

und mit Cauchy-Formel

$$\boxed{L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)}$$

Analog für das antiholomorphe Feld $\bar{T}(\bar{z})$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n \bar{z}^{-n-2}$$

und analoge Integraldarstellung für \bar{L}_n

Man zeigt, daß die Virasoro-Algebra gilt (eine zentrale Erweiterung der Algebra der holomorphen Vektorfelder):

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1) \delta_{m+n,0}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n) \bar{L}_{m+n} + \frac{\bar{c}}{12} m(m^2-1) \delta_{m+n,0}$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0,$$

wobei die zentralen Ladungen c, \bar{c} erfüllen:

- i) $c = \bar{c}$ wg. 2-dim. Poincaré-Invarianz
- ii) $c > 0$ für unitäre CFT
- iii) Für $0 < c < 1$ ist c von der Form

$$c = 1 - \frac{6}{k(k+1)} \quad (k \geq 3)$$

Ein freies skalares Feld hat $c=1$, ein freies Majorana-Fermion (2 Komponenten) hat $c = \frac{1}{2}$.

Die infinitesimale Transformation von $T(z)$ erzeugt durch ein Vektorfeld ξ ist

$$\delta_{\xi} T(z) = (\xi \partial + 2\partial \xi) T(z) + \frac{c}{12} \partial^3 \xi$$

bzw. integriert

$$T(z) \rightarrow (\partial f)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f, z\}_S$$

mit der Schwarzschen Ableitung

$$\{f, z\}_S = \frac{\partial f \partial^3 f - \frac{3}{2} (\partial^2 f)^2}{(\partial f)^2}$$

Bei der Abbildung vom Zylinder auf die komplexe Ebene

$$w \rightarrow z = e^{-iw}$$

wird

$$T_{\text{cyl}}(w) (dw)^2 = \left(T_{\text{plane}}(z) - \frac{c}{24} \right) (dz)^2$$

Damit ist der Hamiltonian auf dem Zylinder

$$H = \int \frac{d\sigma}{2\pi} T_{\tau\tau} = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c+\bar{c}}{24}$$

Eine interessante Subalgebra der Virasoro-Algebra wird durch L_{-1}, L_0, L_1 gebildet:

$$\begin{aligned} [L_{\pm 1}, L_0] &= \pm L_{\pm 1} \\ [L_1, L_{-1}] &= 2L_0 \end{aligned}$$

wobei keine zentrale Ladung auftritt.
(Dies ist die $sl(2)$ -Lie-Algebra.)

Die $L_{\pm 1,0}$ erzeugen gerade die global definierten konformen Transformationen auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, d.h. der Riemanschen Zahlenkugel. In endlicher Form sind dies gerade die Möbius-Transformationen

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \\ \text{und } ad - bc = 1$$

entsprechend der Gruppe $SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$.

Dies enthält

Translationen	$z \rightarrow z + b$	(L_{-1})
Dilatationen	$z \rightarrow az$	$(L_0 = z \partial_z)$
Inversion	$z \rightarrow \frac{1}{z}$	

4) Korrelationsfunktionen

Im Hilbertraum jeder unitären 2-dim. CFT existiert ein eindeutiger Vakuumzustand $|0\rangle$, der $SL(2, \mathbb{C})$ -invariant ist und erfüllt

$$L_n |0\rangle = 0 \quad n \geq -1$$

$$\langle 0 | L_n = 0 \quad n \leq 1$$

Seien $\phi_i(z, \bar{z})$ Operatoren auf dem Hilbertraum der CFT.

Korrelationsfunktionen sind definiert als

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \langle 0 | T \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) | 0 \rangle$$

mit Zeitordnungsoperator T :

$$T \phi_1(z) \phi_2(w) = \begin{cases} \phi_1(z) \phi_2(w) & \text{für } |z| > |w| \\ \phi_2(w) \phi_1(z) & \text{für } |w| > |z| \end{cases}$$

Zum Beispiel hat man

$$\langle \partial x(z) \partial x(w) \rangle = -\frac{1}{(z-w)^2}$$

$$\langle T(z) T(w) \rangle = \frac{c/2}{(z-w)^4}$$

Für primäre Felder ϕ_i ist die Form der Korrelationsfunktionen stark eingeschränkt.

Betrachte z.B. 2-Punkt-Funktion

$$G(z, w) = \langle \phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(w, \bar{w}) \rangle$$

$L_{0, \neq 1}$ annihilieren $|0\rangle, \langle 0|$:

$$L_{-1} \Rightarrow G(z, w) = G(z-w)$$

$$L_0 \Rightarrow G(z) \sim z^{-(h_1+h_2)}$$

$$L_1 \Rightarrow G(z) \sim \delta_{h_1, h_2} z^{-2h_1}$$

Daher mit einer Konstante C_{12}

$$\langle \phi_1(z, \bar{z}) \phi_2(w, \bar{w}) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{(z-w)^{2h_1} (\bar{z}-\bar{w})^{2h_1}} & \text{für } \phi_1 = \phi_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ähnlich erhält man für die 3-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle &= \\ &= C_{123} \cdot (z_1 - z_2)^{-h_1 - h_2 + h_3} (z_2 - z_3)^{-h_2 - h_3 + h_1} (z_3 - z_1)^{-h_3 - h_1 + h_2} \times \text{c.c.} \end{aligned}$$

mit einer Konstante C_{123} .

2- und 3-Punkt-Funktion sind also jeweils bis auf eine Konstante festgelegt.

Für die 4-Punkt-Funktion findet man

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \\ & = f(x, \bar{x}) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-h_i - h_j + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 h_k} \quad * \text{ c.c.} \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion f , die nur vom anharmonischen Verhältnis

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

und einem analog definierten \bar{x} abhängt.

Weitere sehr wichtige Aspekte der CFT sind die Operator-Zustand-Korrespondenz sowie Operatorprodukte und die Operatorproduktentwicklung (OPE).

Siehe hierzu z. B. J. Polchinski, "String Theory" Band 1, oder P. Grisparg, "Applied Conformal Field Theory", hep-th/9108028.

VI Polyakovsches Pfadintegral und Schleifenamplituden

1) Polyakov - Pfadintegral

In Kapitel IV wurde Operator - Zustand - Formalismus für Streuamplitude benutzt. Das geht nicht mehr bei mehr als einer Schleife. → Alternative: Pfadintegral!

In QFT:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

(beachte, kein i im Exponenten, euklidischer Formalismus)

Für Strings benutze Polyakov - Wirkung $S_P[X, g]$:

$$Z = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S[X, g]}$$

↑ g steht für g_{ab}

Die allgemeine Streuamplitude mit Vektoroperatoren für offene / geschlossene Strings wird dann schematisch

$$A = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S[X, g]} \prod_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{M}} d^2\xi_i V_{\alpha_i}(\xi_i) \prod_{j=1}^{n_o} \int_{\mathcal{M}} d\epsilon_j V_{\beta_j}(\epsilon_j)$$

über alle Topologien Weltfläche \mathcal{M} geschl. / offene Strings

Problem hierbei: Eichfreiheit (Reparametrisierungs- und Weyl-Invarianz) \rightarrow Vielfachzählung äquivalenter Konfigurationen \rightarrow Divergenz.

Um dies zu eliminieren, teile durch "Volumen der Eichgruppe", schematisch

$$Z = \int \mathcal{D}_g \mathcal{D}x \frac{1}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} e^{-S}$$

Methode dabei: Eichfixierung, Faddeev-Popov-Methode etc.

Es bleibt dann ein Integral über konform äquivalente Weltflächen.

(Einsparung:



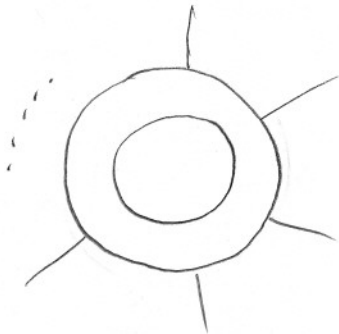
Bei gegebener Topologie sind diese konform äquivalenten Weltflächen durch endlich viele (i.a. komplexe) Parameter, sog. Moduli, beschrieben.

2) Topologie der Schleifenamplituden

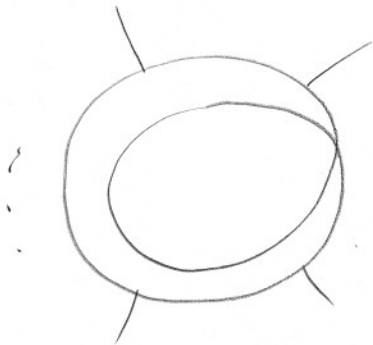
Mögliche Topologien sind verschieden für offene und geschlossene Strings. In beiden Fällen sind es aber wiel weniger als in QFT.

z.B. 1-Loop-Amplituden:

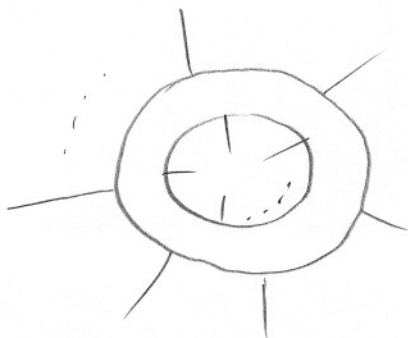
offene Strings:



planares Schleifendiagramm



nicht-orientierbares
Schleifendiagramm

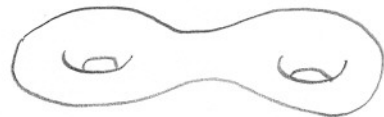


nicht-planares
Schleifendiagramm

Bemerkung: Den Feldtheorie lines erhält man mittels



Bei geschlossenen Strings gibt es noch weniger Diagramme, entsprechend der einfachen Klassifizierung Riemannscher Flächen nach dem Geschlecht g :



usw.

 $g=1$ $g=2$

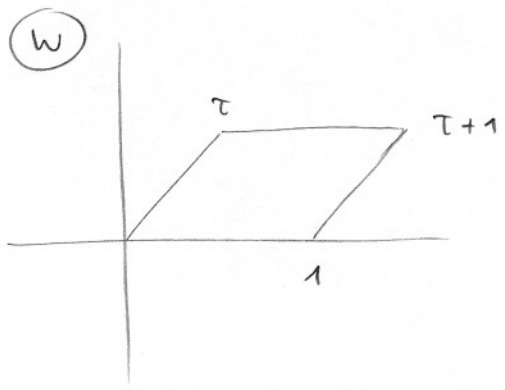
Bei der Kugel ist die Abhängigkeit von der Form durch konforme Transformation eliminierbar. Wir betrachten daher als einfachstes interessantes Beispiel hier den Torus (1-loop-Diagramm für geschlossene Strings).

3) Torus - Amplitude geschlossener Strings

Betrachte Vakuum - Amplitude (d.h. ohne Vertexoperatoren)



Nicht alle Tori sind konform äquivalent!
Tori können allg. charakterisiert werden durch komplexen Parameter τ (einen Modulus), der die Form bestimmt:



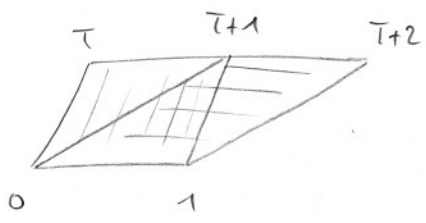
Durch Identifikation gegenüberliegender Seiten des Parallelograms erhält man Torus:

$$w \equiv w+1$$

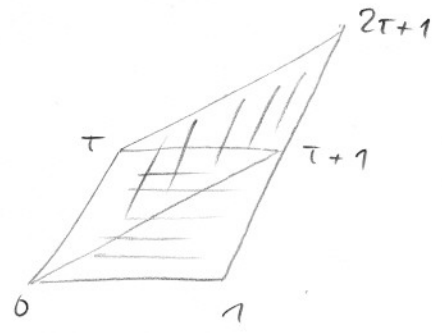
$$w \equiv w+\tau$$

Diese Identifikationen definieren ein Gitter in der komplexen Ebene. Auch andere Fundamentalgebiete definieren denselben Gitter bzw. denselben Torus:

z.B.



oder



Diese sind durch die Transformationen

$$T: \tau \rightarrow \tau+1$$

bzw.

$$TST: \tau \rightarrow \frac{\tau}{\tau+1}$$

verbunden.

(Beachte hier: eine Seite wird auf reelle Achse gelegt und auf 1 normiert.)

Durch solche Transformationen verbundenen τ entsprechen äquivalenten Tori!

Bequeme Generatoren dieser Transformationen sind

$$\boxed{\begin{array}{l} S: \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \\ T: \tau \rightarrow \tau + 1 \end{array}}$$

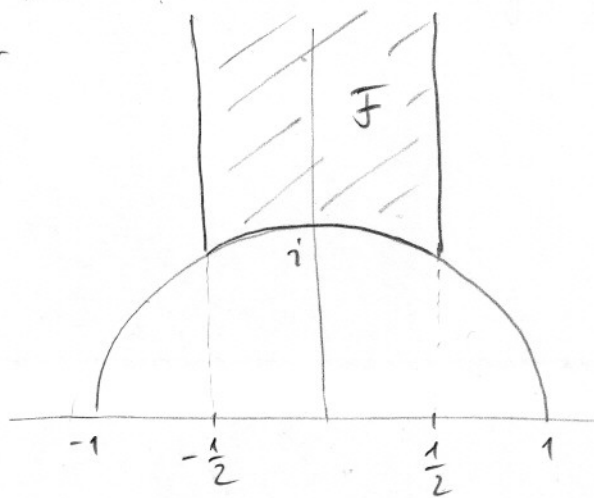
Mit

$$S^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1.$$

Allgemeine Transformationen dieser Art sind Modultransformationen

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) / \mathbb{Z}_2},$$

die die Modulgruppe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ bilden. Der Fundamentbereich F dieser Gruppe ist

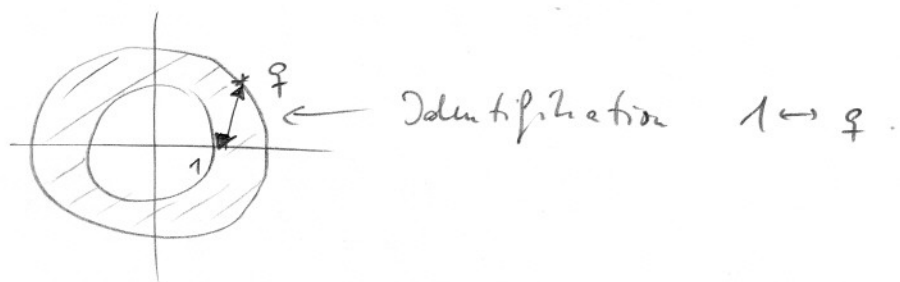


Moduli τ in diesem Fundamentbereich F entsprechen inequivalenten Tori.

Bei konformer Abbildung $z = e^{2\pi i w}$ ist
 Äquivalenz unter T automatisch erfüllt,
 $w \equiv w + \tau$ wird zu

$$z = \eta z \quad \text{mit} \quad \eta = e^{2\pi i \tau}$$

In der z -Ebene wird ein Fundamentalbereich
 des Torus zu einem Kreisring, mit "Torst":



Berechne nun Zustandssumme Z (d.h. den
 Beitrag zum Pfadintegral von dieser
 Topologie). Z hängt von τ ab, d.h. $Z(\tau, \bar{\tau})$.
 Anschließend integriert man über τ im
 Fundamentalbereich äquivalenter Tori.

Sei $\tau = \tau_1 + i\tau_2$.

Der Kreisring entsteht durch Propagation
 des geschlossenen Rings für Zeit $2\pi\tau_2$
 und Translation entlang des Kreises
 um $2\pi\tau_1$.

Der Operator hierfür ist

$$2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H = 2\pi i L_0 \tau - 2\pi i \bar{L}_0 \bar{\tau} + \frac{\pi \tau_2}{6}$$

wobei benutzt wurde

$$P = L_0 - \bar{L}_0$$

$$H = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{1}{12}$$

↙ zentrale Ladung f. freies Boson.

Erhalte Zustandssumme durch Exponenzieren und Spurbildung im Hilbertraum

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} [\exp(2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H)]$$

$$= (q \bar{q})^{-1/24} \text{Tr} (q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0})$$

(Beweis elementar mit $q = e^{2\pi i \tau}$).

Beachte hier Analogie zur statistischen Mechanik.

L_0 zählt die right-mover und addiert Quadrat des Impulses, \bar{L}_0 analog für left-mover.

Daher

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = (q \bar{q})^{-1/24} \int d^{24} k e^{-\pi \tau_2 \alpha' k^2} \prod_n \sum_{N_n, \bar{N}_n=0}^{\infty} q^{n N_n} \bar{q}^{n \bar{N}_n}$$

↑
Gaußsches Integral

Ausführen des Gaußschen Integrals gibt

$$\zeta(\tau, \bar{\tau}) = (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-1/2} |\eta(\tau)|^{-2}$$

mit Dedekindscher η -Funktion

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

Integriere schließlich über Fundamentalbereich \mathcal{F}
 äquivalenter τ 's:

$$\zeta_{\text{Torus}} = \int_{\mathcal{F}} d^2\tau \zeta(\tau, \bar{\tau})$$

VII Kompaktifizierung, T-Dualität und D-Branes

1) Kompaktifizierung auf Kreis

Bosonische Stringtheorie nur in $D = 26$ Dimensionen konsistent \rightarrow Kompaktifizierung notwendig, um 4-dim. Physik zu erhalten.

(Idee geht auf Kaluza & Klein zurück.)
Eine Dimension kompaktifiziert („aufgewickelt“):



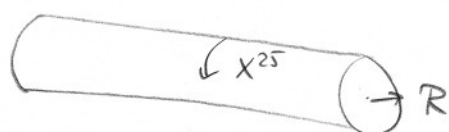
kleiner Radius \rightarrow praktisch „eine Dimension weniger“, wenn von großen Abständen betrachtet.

Dies für 22 Dimensionen: Kompaktifizierung auf 22-dim. Mannigfaltigkeit (z.B. 22-d. Toms) \rightarrow 4-dim. Theorie

Zwecks Einfachheit betrachten wir hier zunächst nur Kompaktifizierung einer Dimension, X^{25} .

Kompaktifizierung von X^{25} auf Kreis mit Radius R bedeutet Identifizierung

$$X^{25} \sim X^{25} + 2\pi R$$



d.h. nach einmaligem Durchlaufen des Kreises ist man am Startpunkt. Man kann den Kreis aber auch mehrmals und in beiden Richtungen durchlaufen, so daß wir identifizieren

$$X^{25} \sim X^{25} + 2\pi m R, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Wir betrachten jetzt geschlossene Strings und benutzen Weltflächenparametrisierung mit $\sigma \in [0, 2\pi]$ (wie in CFT benutzt, beachte aber, daß in Kapitel II $[0, \pi]$ gewählt war).

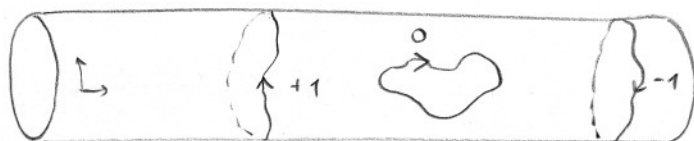
übliche Bedingung für geschlossenen String war

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma).$$

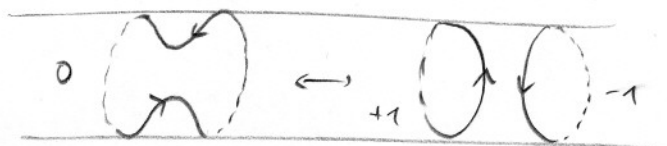
Für $\mu=25$ identifizieren wir aber unendlich viele solche Punkte, d.h. für $\mu=25$

$$\boxed{X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{25}(\tau, \sigma) + 2\pi m R}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Dieses m kann interpretiert werden als Windungszahl. Das einmalige Durchlaufen des geschlossenen Strings entspricht dem m -maligen Durchlaufen der kompaktifizierten Dimension, z.B.



Bemerkung: durch Wechselwirkung sind Übergänge möglich, bei denen aber Σm erhalten ist:



L

Triviale Lösung der Bewegungsgleichung.

Lösung unverändert für $\mu=0, \dots, 24$. Für $\mu=25$ ist jetzt zusätzlicher Term linear in σ möglich.

Die Modumentwicklung für X^{25} war

$$X_R^{25} = \frac{1}{2} X^{25} + l \alpha_0^{25} (\tau - \sigma) + \text{Ost.}$$

$$X_L^{25} = \frac{1}{2} X^{25} + l \tilde{\alpha}_0^{25} (\tau + \sigma) + \text{Ost.}$$

Ursprünglich war kein Term linear in σ in

$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu$ möglich, und es war

$$\alpha_0^{25} = \tilde{\alpha}_0^{25} = \frac{1}{2} l p^{25}$$

Jetzt ist ein Term linear in σ möglich, solange

$$\tilde{\alpha}_0^{25} - \alpha_0^{25} = \frac{m R}{l}$$

denn dann Periodizität erfüllt.

Zweite Bedingung aus der Kompaktifizierung ist, daß der Impuls in der kompaktifizierten Richtung diskret wird (Eindeutigkeit der Wellenfunktion). Wellenlänge ist $\lambda = \frac{2\pi}{p^{25}}$,

also $\frac{2\pi n}{p^{25}} = 2\pi R$ für $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $p^{25} = \frac{2n}{R}$

Aber $l p^\mu$ ist Koeffizient von τ in der Modumentwicklung für X^μ , also

$$\tilde{\alpha}_0^{25} + \alpha_0^{25} = \frac{ln}{R} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Löst man die beiden obigen Bedingungen nach α_0^{25} , $\tilde{\alpha}_0^{25}$ auf, so erhält man als Bedingungen für g.m. Zustände für Theorie kompaktifiziert auf Kreis mit Radius R :

$$\alpha_0^{25} = \frac{ln}{2R} - \frac{mR}{2\ell}$$

$$\tilde{\alpha}_0^{25} = \frac{ln}{2R} + \frac{mR}{2\ell}$$

Berechne nun das Massenspektrum. Dazu wollen wir die kompaktifizierte Dimension als „klein“ annehmen, d.h. als einen Freiheitsgrad betrachten. Es ist $M^2 = -p^\mu p_\mu$, aber aus 25-dim. Sicht lassen wir $\mu = 0, \dots, 24$ laufen. (\rightarrow Masse ist dann invariant unter 25-dim. Lorentzgruppe $SO(24, 1)$). Andererseits gilt immer noch $L_0 - 1 = 0$, wobei L_0 die Summe über alle Dimensionen enthält. Damit wird das Massenspektrum der kompaktifizierten Theorie:

$$M^2 = - \sum_{\mu=0}^{24} p^\mu p_\mu$$

$$= \frac{4}{\alpha'} \left[(\alpha_0^{25})^2 - \sum_{\mu=0}^{24} (\alpha_0^\mu)^2 \right]$$

$$= \frac{4}{\alpha'} \left[(\alpha_0^{25})^2 + 2N - 2 \right]$$

\uparrow zusätzlicher Beitrag durch Kompaktifizierung

(Wir könnten hier auch die left-mover, $\tilde{\alpha}_0^{25}$ etc., nehmen.)

Wir haben also

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left[(\alpha_0^{25})^2 + 2N - 2 \right]$$

und es ist (s.o.)

$$(\alpha_0^{25})^2 = \frac{1}{4} \left(n^2 \frac{\ell^2}{R^2} + m^2 \frac{R^2}{\ell^2} \right) - \frac{nm}{2}$$

Man kann analog weitere Dimensionen auf Kreisen kompaktifizieren (\rightarrow höherdim. Tori) oder auch 2 auf einer Kugel etc.

Es gibt aber Einschränkungen an die Kompaktifizierungsmannigfaltigkeit.

2) T-Dualität geschlossener Strings

Man beobachtet eine "Symmetrie" obiger Formeln:

Vertauscht man gleichzeitig

$$\begin{array}{l} n \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow \frac{\ell^2}{R} \end{array}$$

so erhält man

$$\alpha_0^{25} \rightarrow -\alpha_0^{25} ; \quad \tilde{\alpha}_0^{25} \rightarrow \tilde{\alpha}_0^{25}$$

Dies ist keine eigentliche Symmetrie, da sie zwei verschiedene Theorien verbindet, nämlich mit zwei verschiedenen Kompaktifizierungsradien. Sie heißt daher T-Dualität, wobei T für target space steht, da es sich um verschiedene target spaces handelt, in denen die Felder X^μ leben.

→ Vermutung (die tatsächlich - aber nicht hier - bewiesen werden kann):

Folgende Theorien sind durch Dualität verbunden:

- 1) geschlossene bosonische Strings kompaktifiziert auf Kreis mit Radius R ; Strings mit Impulsquantenzahl n und Windungszahl m
- 2) geschlossene bosonische Strings kompaktifiziert auf Kreis mit Radius $\frac{\alpha'}{R}$; Strings mit Impulsquantenzahl m und Windungszahl n

Präziser kann man zeigen, daß dabei die einseitige Paritäts transformation

$$X_R^{25} \rightarrow -X_R^{25}$$

$$X_L^{25} \rightarrow X_L^{25}$$

auftritt.

Ein einfacher Test dieser Vermutung ist, daß beide Theorien dasselbe Massenspektrum haben, wie aus obiger Formel offensichtlich.

Interessante Grenzwerte:

$R \rightarrow \infty$: $m \neq 0$ - Windungszustände verschwinden (werden unendlich schwer), Impuls wird kontinuierlich

$R \rightarrow 0$: $m \neq 0$ - Zustände werden unendlich schwer, aber reine Windungszustände werden kontinuierlich!

Wir finden: Die Theorie auf Kreis mit Radius R kann genauso gut durch eine Theorie auf Kreis mit Radius $\frac{R}{2}$ beschrieben werden. \rightarrow kleine und große Kompaktifizierungsradien sind äquivalent. So etwas existiert nicht in QFT und ist ein echtes String-Phänomen.

In gewissem Sinne gibt es also einen
minimalen Radius

$$R_{\min} = l.$$

Die Theorie mit $R=l$ ist selbstdual.

Der Kompaktifizierungsradius R ist
 ein Modulus. — Der Moduli-Raum
 geschlossener Stringtheorie mit nur auf
 einem Kreis kompaktifizierten Dimension
 ist $R \geq l$.

T-Dualität ist eine perturbative Dualität,
 d.h. perturbative Zustände in einer Theorie
 werden auf perturbative Zustände in der
 anderen Theorie abgebildet.

Bemerkung: mögliche Dualitäten

Störungstheorie enthält i.a. nicht die
 komplette Information über eine Theorie.

(Beispiel: betrachte Funktion

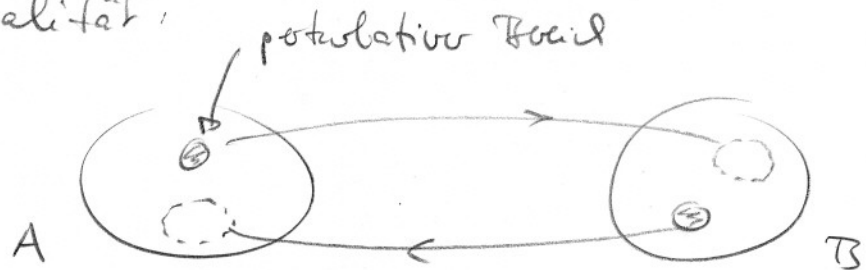
$$f(x) = e^{-1/x^2},$$

bei Taylor-Entwicklung um $x=0$ alle
 Taylor-Koeffizienten 0, bei Entwicklung um
 $x=1$ aber nicht.)

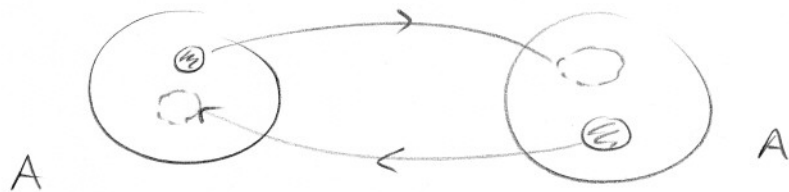
Bei Dualität zweier Theorien wird nicht immer der jeweilige Entwicklungspunkt auf den jeweils anderen abgebildet.

Schematisch:

allg. Dualität:



Selbstdualität:



T-Dualität:



3) T-Dualität offener Strings und D-branes

Offene Strings haben keine Windungsmoden. Diese waren aber wichtig für T-Dualität geschlossener Strings. → Gibt es T-Dualität für offene Strings? Oder: Was passiert, wenn wir $R \rightarrow 0$ für offene Strings betrachten?

Klar ist: offene Stringtheorie ist nicht dual zu sich selbst, da keine (Windungs-) Zustände im Spektrum vorhanden sind, die dual zu Impulsmoden sein könnten.

Betrachte, was passiert, wenn man T-Dualitätstransformation anwendet, die wir für geschlossene Strings gefunden hatten.

Schreibe die für Modumentwicklung offener Strings in der Form

$$X^\tau = X_L^\tau (\sigma_2 - i\sigma_1) + X_R^\tau (\sigma_2 + i\sigma_1)$$

mit

$$X_L^\tau = \frac{x^\tau + c}{2} + i\ell^2 p^\tau (\sigma_2 - i\sigma_1) + i\frac{\ell}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\tau e^{-(\sigma_2 - i\sigma_1)n}$$

$$X_R^\tau = \frac{x^\tau - c}{2} + i\ell^2 p^\tau (\sigma_2 + i\sigma_1) + i\frac{\ell}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\tau e^{-(\sigma_2 + i\sigma_1)n}$$

wobei c beliebige Konstante, die in $X^\tau = X_L^\tau + X_R^\tau$ herausfällt, d.h. x^τ ist Schwerpunkt des Strings bei $\tau=0$ wie üblich.

Volange gilt Periodizität

$$X^{2\tau} \sim X^{2\tau} + 2\pi R.$$

Wende dann Vorschrift für T-Dualität an,
d.h. $X_R^{25} \rightarrow -X_R^{25}$, und erhalte \tilde{X}^{25} :

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{25} &= X_L^{25} - X_R^{25} \\ &= c + 2l^2 p^{25} \sigma_1 + l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-\sigma_2 n} \quad \text{für } 2\sigma_1\end{aligned}$$

Alle anderen Komponenten ($\mu = 0, \dots, 24$)
bleiben wie gehabt.

Wir finden:

- * Der String trägt keinen Impuls in 25-Richtung,
d.h. $\dot{X}^{25} = 0$. Der Schwerpunkt ist also
in dieser Richtung fixiert.
- * Im Oszillatoranteil sind die cos-Terme
der Neumann-Randbedingungen ersetzt
durch sin-Terme. Die Endpunkte des
Strings, $\sigma_1 = 0, \pi$, sind fest in 25-Richtung.
→ Randbedingung für 25-Richtung ist
also jetzt Dirichlet-Randbedingung

$$\left. \partial_{\sigma_2} \tilde{X}^{25} \right|_{\sigma_1=0, \pi} = 0$$

↑ (bzw. τ)
Statt Neumann-Randbedingung

$$\left. \partial_{\sigma_1} X^{25} \right|_{\sigma_1=0, \pi} = 0 \quad \text{wie vorher.}$$

* Der Nullmoden-Term beschreibt nicht mehr den Impuls, da jetzt proportional zu σ_1 .

Der Anfangspunkt, $\sigma_1 = 0$, ist bei c .

Endpunkten von $p^{25} = \frac{h}{R}$ geht: Endpunkt, $\sigma_1 = \pi$, ist bei

$$\tilde{X}^{25} = c + 2\pi u \frac{\ell^2}{R} = c + 2\pi u \tilde{R}$$

Das ist also eine Windungsmode um einen Kreis mit dualem Radius $\tilde{R} = \frac{\ell^2}{R}$ (vgl. geschl. String). Aber: jetzt ist offener String geworden.

Dies ist stabil, da die Enden fest sind bei $\tilde{X}^{25} = c$ auf dem Kreis, d.h. ein Entwinden ist nicht möglich ohne Brechen d. Strings.

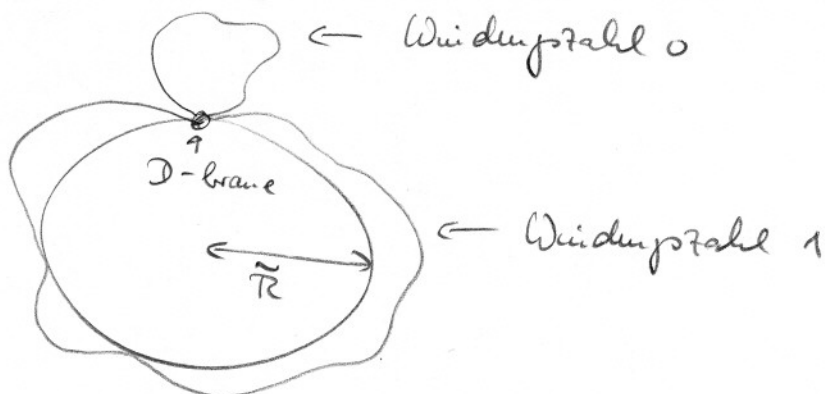
Mit T-Dualität erhält man also eine Theorie auf Kreis mit dualem Radius $\tilde{R} = \frac{\ell^2}{R}$ mit

offener String, Impuls entlang Kreis, keine Windungsmoden	T-Dualität →	offener String <u>kein</u> Impuls entlang Kreis <u>nur</u> Windungsmoden
---	-----------------	--

Enden fest bei $\tilde{X}^{25} = c$, String kann aber mehrmals gewunden sein.

Die Hyperebene $\tilde{X}^{25} = c$ heißt Dirichlet-brane
oder D-brane. Illustriert in einem

Diagramm:



(hierbei sollen die nicht auf dem Kreis
anliegenden Strips schematisch die freie
Bewegung der Strips in den anderen
25 Dimensionen anzeigen).

Die kompaktifizierte Dimension geht bei
T-Dualität offener Strips nicht verloren:
die Enden sind zwar auf D-brane
fixiert, aber das Innere bewegt sich in
26 Dimensionen via Windungsmoden.

Man hätte auch von Anfang an offene
Strips mit Dirichlet-Randbedingungen
betrachten können, denn dies ist äquivalent
mit Verschieben der Randpunkte bei der
Wirkung S . Diese Möglichkeit wurde lange

ignoriert, weil eine D-brane die Poincaré-Invarianz der Raumzeit bricht.

Abw: a) Poincaré-Invarianz ist nur in der (kleinen) kompaktifizierten Dimension gebrochen, und b) können D-branes als dynamische, ausgedehnte (nichtpotentielle) Objekte der Stringtheorie interpretiert werden. (→ Brechung der Poincaré-Invarianz ähnlich wie bei Betrachtung eines Atoms in QM).

Obige D-brane ist ein $D-1$ -dimensionales Objekt mit $D=26$, heißt aber D24-brane, wobei 24 die Zahl der raumartigen Dimensionen ist. Offene Strings können nicht von D24-brane in transversaler (25-) Richtung, haben aber Neumann-Randbedingungen in $D-1$ anderen Richtungen.

Kompaktifiziere weitere (24-) Richtung und T-dualisiere → behalte \tilde{X}^{24} und \tilde{X}^{25} mit Dirichlet-Randbedingungen. Damit hat man freie Bewegung der Enden in $D-2$ Richtungen, aber Enden fest auf $D(D-3)$ -brane.

Kompaktifiziert man auf einem allgemeinen Torus und T-dualisiert, erhält man eine D_p -brane, wobei $p \in \{0, \dots, D-1\}$.

Die ursprüngliche Theorie (nur Neumann-Randbedingungen) lebt dann auf einer raumfüllenden $D25$ -brane (d.h. die $D(D-1)$ -brane).

4) Mehrere D-branes

Bisher: D_p -brane beliebiger Dimension durch Kompaktifizierung und T-Dualisieren offener Strings. Aber: immer nur eine D-brane. Interessanter sind mehrere.

→ Benutze offene Strings mit Chan-Paton-Freiheitsgraden, $|\psi\rangle \otimes \lambda_{ij}$ (siehe IV.3), Enden mit Ladungen i, j in N bzw. \bar{N} -Darst. von $U(N)$.

Kompaktifiziere dann wieder eine Dimension auf Kreis mit

$$X^{25} \sim X^{25} + 2\pi m R$$

Frage: Was passiert mit Chan-Paton-Freiheitsgraden bei Durchlauf des Kreises?

λ_{ij} kann dabei transformiert werden mit beliebigem $U \in U(N)$:

$$\lambda_{ij} \rightarrow U_{ii} \lambda_{ij} U_{jj}^+$$

Diese sog. Wilson - Linie bricht Eichinvarianz in 25-dim. Theorie zu einer Untergruppe von $U(N)$, die mit U kommutiert.

Wähle Basis, in der U diagonal:

$$U = \exp \text{diag}(-i\theta_1, \dots, -i\theta_N)$$

Falls alle θ_i distinct, so ist kommutierende Untergruppe gerade $U(1)^N$, d.h. diagonale Matrizen. Falls zwei θ_i gleich, so gibt es einen $U(2)$ -Faktor etc.

Betrachte nun Modumentwicklung für String mit verschiedenen Chan-Paton-Labels, d.h. $i \neq j$. Der Zustand $|f\rangle \otimes \lambda_{ij}$ erhält eine Phase $\exp i(\theta_j - \theta_i)$, wenn einmal um den Kreis transportiert. Dann ist aber der Impuls nicht mehr in Einheiten von $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ quantisiert: jetzt braucht man

$$\exp i p^{25} 2\pi R = \exp -i(\theta_i - \theta_j)$$

bzw.

$$p^{25} = \frac{n}{R} + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi R}$$

wobei der letzte Term nicht ganzzahlig in Einheiten von $\frac{1}{R}$ ist.

Durch T-Dualisierung wird die Impulszahl zur Windungszahl, d.h. wir erhalten eine fraktionale Windungszahl. Konkret für die Nullmode:

$$\tilde{X}_{ij}^{25} = c_{ij} + 2\tilde{R} \sigma_1 \left(n + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi} \right)$$

Diagonale Zustände ($i=j$) sind ganzzahlig gewunden, nicht-diagonale ($i \neq j$) sind fraktional gewunden. Erklärung ist folgende:

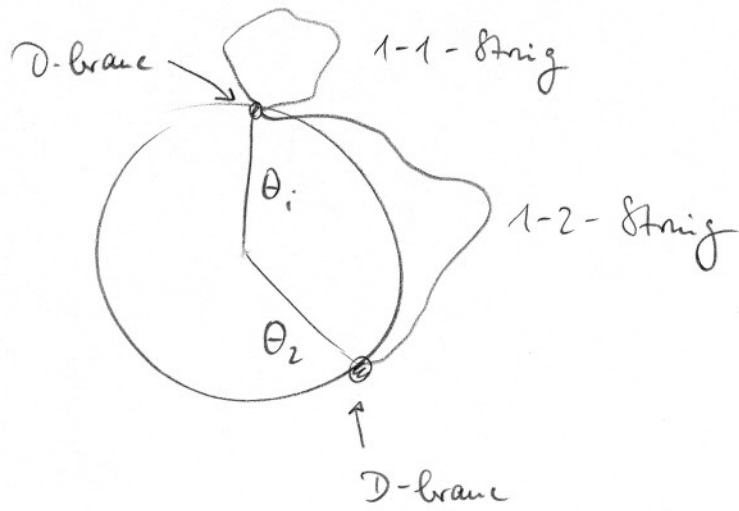
Es gibt in der T-dualisierten Theorie N D-branes mit Winkelintervallen $\theta_j - \theta_i$, und verschiedene Labels gehören zu verschiedenen D-branes.

Wähle die (bisher beliebigen) c_{ij} als $R\theta_i$, so erhält man

$$\tilde{X}_{ij}^{25} (\sigma=0) = R\theta_i$$

$$\tilde{X}_{ij}^{25} (\sigma=\pi) = R\theta_j$$

Schematisch für $N=2$:



- Es gibt für allgemeines N also N^2 verschiedene Stringtypen, je nach den D-branes, auf denen sie enden.

Betrachte nun das Spektrum:

Wenn alle θ_i verschieden, so sind nur die diagonalen Strings masselos. Die nicht-diagonalen haben einen Beitrag zur Masse von $T(\theta_j - \theta_i) \tilde{R}$, der von den Windungszahlen n und m stammt.

- Es gibt N verschiedene masselose Vektorfelder, jedes für eine $U(1)$.

Anderes sieht es aus, wenn zwei oder mehr θ_i gleich sind.

Falls zwei θ_i gleich, so werden zusätzlich zwei nicht-diagonale Zustände masselos, und man erhält masselose Vektorzustände in der adjungierten Darstellung der $U(2)$.

Das heißt: Zwei kollidente (d.h. aufeinanderliegende) D-branes haben eine größere, nicht-abelsche Eichsymmetrie!

Bewegt man die beiden D-branes voneinander weg, so wird die $U(2)$ -Eichsymmetrie zur abelschen Untergruppe $U(1) \times U(1)$ gebrochen, und die nicht-diagonalen Eichbosonen werden massiv. Das ist gerade der Higgs-Mechanismus.

Analoges gilt für mehrere kollidente D-branes.

VIII Superstrings

1) Motivation

Bisher haben wir bosonische Strings betrachtet; konsistent in $D=26$ Dimensionen, aber zwei wichtige Probleme:

- i) Tachyon \rightarrow Vakuuminstabilität etc.
- ii) keine Fermionen, die aber für Beschreibung unserer Welt nötig sind.

Beide Probleme kann man zusammen lösen! Mittels Fermionen läßt sich unphysikalischer Tachyon-Zustand aus Theorie entfernen. Außerdem hat die Theorie Supersymmetrie (d.h. eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen).

Es gibt zwei Möglichkeiten, Supersymmetrie in Stringtheorie einzuführen.

- * Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) - Formalismus: benutzt 2-dim. Weltflächen-Supersymmetrie. RNS erfordert Gliozzi-Scherk-Olive (GSO) - Projektion, um Raum-Zeit-Supersymmetrie, tachyonfreies Spektrum und modulare Invarianz zu realisieren.

* Lichtkegel - Green - Schwarz - Formalismus,

wobei Raum-Zeit - Supersymmetrie von Anfang an explizit ist; es wird keine GSO - Projektion benötigt. Im Gegensatz zu RNS kann Green - Schwarz - Formalismus nicht vollständig kovariant quantisiert werden.

Beachte Unterschied zwischen Weltflächen - und Raum-Zeit - Supersymmetrie! Ein Fermion dreht sich um 2π mal auf der Weltfläche, im anderen Fall bei der selben Rotation in der Raum-Zeit.

Wir verwenden hier den (einfachen) RNS - Formalismus. Dabei findet man am Ende, daß auch (wie gewünscht) Raum-Zeit - Supersymmetrie herauskommt.

2) Superstring - Wirkung

Wir führen masselose Fermionen auf der Weltfläche ein. Beachte, daß die resultierenden Raum-Zeit - Fermionen trotzdem Masse haben können.

Fermionen beschrieben (vgl. QFT) durch
Grassmann - Variablen ψ_A , d.h. antikommutierende
 Variablen,

$$\psi_A \psi_B = -\psi_B \psi_A,$$

Diese sollen die masselose Dirac-Gleichung
 erfüllen, die aus der Wirkung

$$S_D = \int d^2x \, i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

resultiert, wobei

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

und die γ^α erfüllen die Clifford - Algebra

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$$

Die kleinste d -dimensionale Darstellung dieser
 Algebra besteht aus $2^{d/2} \times 2^{d/2}$ Matrizen, und
 hier $d=2$. Eine mögliche Wahl ist

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

In dieser Basis ist das Fermion-Feld ein
2-komponentiger Majorana-Spinor,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$$

mit $\psi_{\pm}^* = \psi_{\pm}$. Damit ist die Wirkung reell.
Der in der Wirkung auftretende Term ist
in diesen Komponenten

$$i \bar{\psi} \not{\partial} \psi = i \psi_- \partial_+ \psi_- + i \psi_+ \partial_- \psi_+.$$

Wir erhalten also die masselose Dirac-Gleichung

$$\boxed{\partial_+ \psi_- = \partial_- \psi_+ = 0},$$

insbesondere ist $\psi_+ = \psi_+(\sigma^+)$, $\psi_- = \psi_-(\sigma^-)$.

Obiges gilt für ein Fermion. Wir wollen
die Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen
haben. Daher führen wir D Fermion-Felder ψ^I
ein, genauso viele wie Bosonfelder X^I .

ψ^I hat also einen Vektorindex μ bzgl.

Lorentz-Transformationen in der Raum-Zeit.

In der 2-dim. Theorie auf der Weltfläche
wird μ aber nur als Index aufgefasst.

Führe dann Fermionen in die eichfixierte Polyakov-Wirkung ein:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \left[\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i \bar{\psi}^\mu e^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \right]$$

("Richtiges" Vorgehen startet mit nicht eichfixierter Wirkung, fixiert Eichung, constraints etc. → behalte obige Wirkung)

Diese Wirkung besitzt Supersymmetrie!
 Infinitesimale Transformation für diese Symmetrie ist

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \delta \psi^\mu &= -i e^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \end{aligned}$$

wobei ϵ ein infinitesimaler antikommutierender Spinor. Diese Transformation mischt bosonische und fermionische Felder. Dies wirkt sowohl auf left-mover als auch auf right-mover. Man spricht daher von (1,1) - Supersymmetrie auf der Weltfläche.

Beweis, als Übung, zeige erst $\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} \psi$
 und $\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\epsilon}^\beta = \epsilon^\beta \epsilon^\alpha$.

Bemerkung: Der Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen ergibt eine räumliche Translation! Infinitesimal explizit

$$[\delta_1, \delta_2] X^\mu = \underbrace{a^\alpha}_{\uparrow \text{erzeugt Translation}} \partial_\alpha X^\mu$$

mit

$$a^\alpha = 2i \bar{\epsilon}_1 \epsilon^\alpha \epsilon_2$$

Der erhaltene Weltflächen - Noether - Strom J_α zu obiger Supersymmetrie ist der fermionische Superstrom

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon^\beta \epsilon_\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu$$

Es gilt

$$\epsilon^\alpha J_\alpha = 0$$

wegen $\epsilon^\alpha \epsilon^\beta \epsilon_\alpha = 0$. Hieraus folgt, daß manche Komponenten von J_α verschwinden.

Beachte: J hat je zwei Spinor - Indizes (A bzw. α oben) und Lichtkegel - Indizes \pm .

Wegen obiger Gleichung $\epsilon^\alpha J_\alpha = 0$ sind nur die positive - Chiralitätskomponente von J_{+A}

und die negative-Chiralitätskomponente von J -A ungleich null. Nenne diese jetzt J_+ und J_- , also

$$\begin{aligned} J_+ &= \psi_+^\dagger \partial_+ X_\mu \\ J_- &= \psi_-^\dagger \partial_- X_\mu \end{aligned}$$

und diese sind erhalten,

$$\partial_- J_+ = \partial_+ J_- = 0$$

Der Energie-Impuls-Tensor mit Fermionen ist

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\dagger \rho_\alpha \partial_\beta \psi + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\dagger \rho_\beta \partial_\alpha \psi \\ &\quad - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} \left(\partial^\gamma X^\mu \partial_\gamma X_\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\dagger \rho^\gamma \partial_\gamma \psi \right) \end{aligned}$$

$T_{\alpha\beta}$ ist spurfrei, daher

$$T_{+-} = T_{-+} = 0$$

mit Vorgehen ähnlich (aber komplizierter als bei) bosonischem String findet man folgende Constraints.

$$\begin{aligned} T_{++} &= T_{--} = 0 \\ J_+ &= J_- = 0 \end{aligned}$$

Diese heißen Super-Virasoro-Constraints.

3) Randbedingungen

Betrachte nun Randbedingungen, die sich aus Superstringwirkung ergeben. Für die bosonischen Felder sind dies dieselben wie beim bosonischen String. Durch Variation der Felder ϕ erhält man die Dirac-Gleichung und den Randterm (wir wählen wieder $\sigma \in [0, \pi]$ für offenen String).

$$\delta S_b \sim \int d\tau \left[\dot{\phi}_+^\dagger \delta \phi_{\mu+} - \dot{\phi}_-^\dagger \delta \phi_{\mu-} \right] \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, wie diese vier Terme verschwinden können.

Bei offenen Strings sind die Enden $\sigma=0, \pi$ unabhängig, und die entsprechenden Randterme sollen unabhängig verschwinden, d.h.

$$\dot{\phi}_+^\dagger \delta \phi_{\mu+} = \dot{\phi}_-^\dagger \delta \phi_{\mu-}$$

an beiden Enden. Dies ist äquivalent zu

$$\delta (\phi_{\mu+})^2 = \delta (\phi_{\mu-})^2$$

bzw.

$$\left| \dot{\phi}_+^\dagger = \pm \dot{\phi}_-^\dagger \right|$$

an beiden Enden.

Insgesamt ist ein relatives Vorzeichen frei, wir wählen als Konvention + bei $\sigma=0$:

$$\boxed{\psi_+^\mu(\tau, 0) = \psi_-^\mu(\tau, 0)}$$

Es bleiben zwei Möglichkeiten bei $\sigma=\pi$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_+^\mu(\tau, \pi) = \psi_-^\mu(\tau, \pi) & \text{Ramond (R) - Randbed.} \\ \psi_+^\mu(\tau, \pi) = -\psi_-^\mu(\tau, \pi) & \text{Neveu-Schwartz (NS) - Randbed.} \end{array}}$$

Lösungen mit erster Bedingung gehören zum Ramond (R) - Sektor der Theorie, solche mit zweiter Bedingung zum Neveu-Schwartz (NS) - Sektor.

Wir wählen denselben Typ Randbedingung für alle $\mu=0, \dots, D-1$, um vollständige D -dimensionale Rotationsinvariant sicherzustellen.

Schreibe jetzt die Lösungen der Bewegungsgleichung mittels Fourier-Entwicklung. Es ist

$$\psi_+ = \psi_+(\sigma^+) \quad , \quad \psi_- = \psi_-(\sigma^-)$$

Die Entwicklung ist ähnlich für den R- und den NS-Sektor, aber mit einem kleinen, wichtigen Unterschied!

Ramond - Sektor:

$$\begin{aligned} \psi_+^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \psi_-^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \end{aligned}$$

(beachte, daß n ganzzahlig)

Neveu - Schwarz - Sektor:

$$\begin{aligned} \psi_+^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)} \\ \psi_-^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \end{aligned}$$

(wobei jetzt $r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$) Durch $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ erhält man gerade unterschiedliche Vorzeichen bei $\sigma = 0, \pi$.

In obigen Entwicklungen sind d_n^μ und b_n^μ antikommutierende Objekte. Es gilt weiter die Majorana - Bedingung

$$\psi_{-n}^\mu = (\psi_n^\mu)^* \quad (\mathbb{R})$$

$$\psi_{-r}^\mu = (\psi_r^\mu)^* \quad (\text{NS})$$

Man kann zeigen, daß \mathbb{R} -Randbed. auf Raumzeit-Fermionen führt, NS-Randbed. auf Raumzeit-Bosonen (siehe später).

Eine weitere Möglichkeit für die Randterme ist, daß die mit ψ_+ und die mit ψ_- separat verschwinden. Damit sind Left-mover und Right-mover unabhängig, d.h. wir betrachten geschlossene Strings. Die Randbedingungen sind dann also

$$\psi_+^\mu(\tau, \sigma) \delta \psi_{\mu+}(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0$$

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) \delta \psi_{\mu-}(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0,$$

und wir haben als Modenentwicklung separat für left-/right-mover

$$\psi_+^\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad \text{R}$$

oder

$$\psi_+^\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)} \quad \text{NS}$$

und

$$\psi_-^\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad \text{R}$$

oder

$$\psi_-^\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)} \quad \text{NS}$$

Da hier die left- und right-mover unabhängig,
kann man für beide auch unabhängig
R- oder NS- Randbedingungen wählen.

→ Erhalte vier verschiedene Sektoren geschlossener
Superstrings:

$$R-R : \{ d_m^\mu, \tilde{d}_n^\nu \}$$

$$R-NS : \{ d_m^\mu, \tilde{b}_s^\nu \}$$

$$NS-R : \{ b_r^\mu, \tilde{d}_n^\nu \}$$

$$NS-NS : \{ b_r^\mu, \tilde{b}_s^\nu \}$$

wobei $m, n \in \mathbb{Z}$, $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Man kann zeigen, daß die R-R und
NS-NS Sektoren auf Raum-Zeit-Bosonen
führen, die R-NS und NS-R Sektoren
dagegen auf Raum-Zeit-Fermionen.

Erhalte schließlich die Super-Virasoro-Operatoren
als Moden von $T_{\alpha\beta}$ und J_α .

Für offene Strings sind L_m wie gehabt

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \left[e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma} T_{++} \end{aligned}$$

Zusätzlich haben wir fermionische Generatoren:

Für R-Randbed.:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_m &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \left[e^{im\sigma} \mathcal{J}_+ + e^{-im\sigma} \mathcal{J}_- \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{im\sigma} \mathcal{J}_+ \end{aligned}$$

und für NS-Randbed.:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_r &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \left[e^{ir\sigma} \mathcal{J}_+ + e^{-ir\sigma} \mathcal{J}_- \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^\pi d\sigma e^{ir\sigma} \mathcal{J}_+ \end{aligned}$$

Für geschlossene Strings erhalten wir zwei

Sätze von Super-Virasoro-Generatoren:

einmal als Moden von T_{++} und \mathcal{J}_+ , und
einmal als Moden von T_{--} und \mathcal{J}_- .

4) Quantisierung, kritische Dimension

Vorgehen ist analog dem beim bosonischen String, z.B. in kovarianter Quantisierung.

Aus Vertauschungsrelationen

$$[\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = -i\pi \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}$$

halte wie gehabt

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m \delta_{m+n} \eta^{\mu\nu},$$

und analog für $\tilde{\alpha}_m$ bei geschlossenem String.

Quantisierung fermionischer Koordinaten erfolgt
ähnlich: aus kanonischer Antivertauschungsrelation
für $\psi_A^\mu(\tau, \sigma)$,

$$\{\psi_A^\mu(\tau, \sigma), \psi_B^\nu(\tau, \sigma')\} = \pi \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu} \delta_{AB}$$

erhält man für die Moden d_n^μ, b_r^μ

$$\begin{aligned} \{d_m^\mu, d_n^\nu\} &= \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n} \\ \{b_r^\mu, b_s^\nu\} &= \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s} \end{aligned}$$

und analog beim geschlossenem String für \tilde{d}, \tilde{b} .

Man findet dann die Modenentwicklung
für L_m, G_r, F_m (unterschieden nach Sektoren)

$$L_m = L_m^{(\alpha)} + L_m^{(d)} \quad (\mathbb{R})$$

$$L_m = L_m^{(\alpha)} + L_m^{(b)} \quad (\text{NS})$$

mit (wie gehabt beim bosonischen String)

$$L^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{n+m} :$$

und

$$L_m^{(d)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(n + \frac{1}{2} m \right) : d_{-n} \cdot d_{m+n} :$$

$$L_m^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(r + \frac{1}{2} m \right) : b_{-r} \cdot b_{m+r} :$$

(wobei in obigen Ausdrücken die Normalordnung nur für den $m=0$ -Beitrag wichtig ist).

Weiter

$$F_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot d_{m+n} \quad (\mathbb{R})$$

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot b_{r+n} \quad (\text{NS})$$

Entsprechend erhalten wir verschiedene Super-Virasoro-Algebren für den \mathbb{R} - und NS-Sektor.

Die Super-Virasoro-Algebra für den NS-Sektor („bosonischer Sektor“) ist

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n}$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2} m - r \right) G_{m+r}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2 L_{r+s} + B(r) \delta_{r+s}$$

mit den Anomalie-Termen

$$\left[\begin{array}{l} A(m) = \frac{1}{8} D (m^3 - m) \\ B(r) = \frac{1}{2} D (r^2 - \frac{1}{4}) \end{array} \right].$$

Das physikalische Spektrum für den NS-Sektor erhält man aus den Bedingungen

$$\left[\begin{array}{ll} G_r |\phi\rangle = 0 & r > 0 \\ L_n |\phi\rangle = 0 & n > 0 \\ (L_0 - a_{NS}) |\phi\rangle = 0 \end{array} \right]$$

mit einer Normalordnungs konstante a_{NS} .

Mittels Vorgehen analog dem beim bosonischen String findet man, daß Konsistenz erfordert, daß

$$\left[\begin{array}{l} a_{NS} = \frac{1}{2} \\ D = 10 \end{array} \right]$$

$D=10$ ist die kritische Dimension der Superstringtheorie.

Ähnlich findet man für den Ramond-Sektor die Super-Virasoro-Algebra

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n} \\ [L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2}m-n\right) F_{m+n} \\ \{F_m, F_n\} &= 2 L_{m+n} + B(m) \delta_{m+n} \end{aligned}$$

wo jetzt

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{8} D m^3 \\ B(m) &= \frac{1}{2} D m^2 \end{aligned}$$

Im R-Sektor erhält man die physikalischen Zustände aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} F_n |\psi\rangle &= 0 \\ L_n |\psi\rangle &= 0 \\ (L_0 - a_R) |\psi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} F_n |\psi\rangle &= 0 \\ L_n |\psi\rangle &= 0 \\ (L_0 - a_R) |\psi\rangle &= 0 \end{aligned}} \right\} n > 0$$

und Konsistenz erfordert hier

$$\begin{aligned} a_R &= 0 \\ D &= 10 \end{aligned}$$

also ist auch im R-Sektor $D=10$ die kritische Dimension.

5) Massenspektrum offener Superstrings

Offene Superstringtheorie wird (mit GSO-Projektion, s.u.) als Typ I - Superstring-Theorie bezeichnet (wg. $N=1$ Raum-Zeit-SUSY).

Erhalte Massenformel aus der Bedingung für L_0 , wie beim bosonischen String gehabt. Man findet im NS-Sektor:

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r - \frac{1}{2}$$

bzw.

$$\left| M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(N - \frac{1}{2} \right) \right|,$$

denn $\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r$ zählt angeregte Moden gewichtet mit r . (Analoger Faktor n war in $\alpha_{-n} \cdot \alpha_n$ schon enthalten.)

→ Grundzustand ist wieder ein Tachyon!

Die Massenniveaus haben Abstände $\frac{1}{2}$;

der erste angeregte Zustand ist der masselose Vektorzustand $b_{-\frac{1}{2}}^{\mu} |0, k^{\nu}\rangle$.

Im R- Sektor findet man

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{n=0}^{\infty} n d_{-n} \cdot d_n$$

bzw. $M^2 = N$

Hier ist der Grundzustand masselos, aber kein Skalar wegen der Operatoren d_0^\dagger :

Die d_0^\dagger erfüllen

$$\{d_0^\dagger, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$$

und vertauschen mit M^2 . Dies ist (bis auf Normierung) gerade die Algebra für 10-dim. Dirac Γ -Matrizen. \rightarrow Wähle diese als Darstellung der Operatoren d_0^\dagger :

$$\Gamma^\mu = i\sqrt{2} d_0^\dagger$$

damit ist für die Γ^μ die Clifford-Algebra mit Normierung erfüllt.

In $D=10$ sind die Gamma-Matrizen 32×32 -Matrizen (allgemein: $2^{D/2} \times 2^{D/2}$).

Die Wellenfunktionen müssen also 32-komponentige Objekte sein, um unter den d^+ zu transformieren.

Diese sind aber Γ -Matrizen, und die Zustände daher Raum-Zeit-Spinoren!

→ Wir erhalten also Raum-Zeit-Fermionen!

Ähnliches gilt für jedes Massenniveau.

→ Der R-Sektor enthält nur Fermionen.

Bemerkung:

In $D=10$ können die Γ -Matrizen alle rein imaginär oder alle reell gewählt werden. Wir werden sie imaginär wählen.

(Dies geht auch in $d=2$, allgemein in $d=2,3,4 \pmod{8}$).

Damit erhalten wir reelle Majorana-Spinoren.

Bemerkung:

Man kann bei offenen Superstrings (mit GSO-Projektion, s.u.) noch Chan-Paton-Indizes benutzen. Konsistenz (→ tadpole-cancellation) erfordert, daß diese in der adjungierten Darstellung einer bestimmten Gruppe sind,

nämlich $SO(32)$. → Typ I $[SO(32)]$ -Superstringtheorie.

Dies ist oft implizit verstanden unter Typ I-Theorie.

6) GSO - Projektion

Die so erhaltene offene Stringtheorie hat folgende Nachteile:

- i) ein Tachyon
- ii) „eigenartiges“ Verhalten der Operatoren f^μ :
 μ ist Vektorindex \rightarrow für Boson-Zustand $|\phi\rangle$ transformiert sich auch $f^\mu |\phi\rangle$ wie ein Boson, aber: f^μ antikommutierend, d.h. sollte normalerweise Boson auf Fermion abbilden.

Allgemeiner: Betrachte

$$f^{\mu_1}(\sigma_1) f^{\mu_2}(\sigma_2) \dots f^{\mu_n}(\sigma_n) |\phi\rangle$$

\rightarrow kein Problem für gerade Anzahl n , dann gesamter Operator bosonisch, d.h. kommutierend.
 Mögliche Idee daher: solche Zustände für ungerade n ausschließen?!

- iii) keine Raum-Zeit-Supersymmetrie!

Raum-Zeit-SUSY würde gleich viele bosonische und fermionische Zustände bei jedem Masseniveau erfordern. Aber: NS hat halbzahlig Abstände, R nicht.

Außerdem sogar schon bei masselosen Niveaus SUSY verletzt:

NS hat masselosen Vektor, d.h. 8 Freiheitsgrade (transversale in $D=10$), R hat 32-komponentigen reellen Majorana-Spinor. Dirac-Gleichung verbindet eine Hälfte mit der anderen
 → bleiben 16 Freiheitsgrade, d.h. doppelt so viele wie benötigt.

Man kann alle drei Probleme mittels der Gliozzi-Scherk-Olive (GSO) - Projektion lösen:
 ungeeignete (bzw. unphysikalische) Zustände werden ausgeschlossen.

Betrachte hierzu erst
masselose Zustände

Wir haben: NS: Boson mit 8 Freiheitsgraden
 R: Fermion mit 16 Freiheitsgraden
 → eliminiere 8 von diesen 16!

Definiere den Operator

$$\Gamma_{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9$$

und klaserweise Γ_{11} reell.

(analog γ_5 in normaler Dirac-Algebra in 4d)

Man kann zeigen

$$\begin{cases} \{\Gamma_{11}, \Gamma^{\dagger}\} = 0 \\ (\Gamma_{11})^2 = 1 \end{cases}$$

und damit hat Γ_{11} die Eigenwerte ± 1 .

Spinoren ψ mit $\Gamma_{11} \psi = (\pm) \psi$ haben per def. positive (negative) Chiralität. Die zugehörigen Projektionsoperatoren sind

$$\frac{1}{2} (1 \pm \Gamma_{11})$$

Spinoren mit definierter Parität heißen Weyl-Spinoren. Die Beschränkung auf Spinoren einer bestimmten Chiralität heißt Weyl-Bedingung.

Da Γ_{11} reell ist, sind beide Anteile $\frac{1}{2} (1 \pm \Gamma_{11}) \psi$ reell.

→ Majorana- und Weyl-Bedingungen sind miteinander kompatibel.

(Dies gilt allg. nur in $D=2 \bmod 8$ Dimensionen)

Beschränke also Theorie auf Majorana-Weyl-Spinoren positiver Chiralität, $\Gamma_{11} = +1$.
Damit fällt Hälfte der Spinoren weg und die Anzahl ist ok. für das masselose Niveau.

[Erinnerung: Spinor m. 32 komplexen Komponenten

Majorana \rightarrow 32 reelle Komponenten

Weyl \rightarrow 16 " "

Dirac-Gl. \rightarrow 8 Freiheitsgrade]

Jetzt zur allgemeinen GSO-Projektion.

Betrachte massive Zustände. [Erinnerung: in Produkten $\underbrace{\psi \dots \psi}_n |\phi\rangle$ waren gerade n kein Problem.]

Definiere den Fermionenzahloperator $(-1)^F$ so, daß

$$\begin{aligned} (-1)^F X^\mu &= X^\mu \\ (-1)^F \psi^\mu &= -\psi^\mu \end{aligned}$$

und damit ist der Operator für alle Zustände festgelegt, da X^μ und ψ^μ eine Basis für die Operatoren bilden.

Im also der Eigenwert eines Zustands festgelegt, so sind die Eigenwerte aller Zustände bestimmt. Wir wählen hier so, daß das Tachyon im NS-Sektor den Eigenwert -1 hat.

Weiter ist offenbar $[(-1)^F]^2 = 1$, d.h. $(-1)^F$ ist geeignet für Konstruktion eines Projektionsoperators.

Eine explizite Konstruktion des Operators $(-1)^F$ ist im NS-Sektor:

$$(-1)_{NS}^F = - (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r} \cdot b_r}$$

damit Tachyon Eigenwert -1 hat

Der Exponent enthält einen Anzahloperator, d.h. wir haben Eigenwert ∓ 1 für gerade / ungerade Anzahlen.

Im R-Sektor ergänzen wir den Operator, der die Anzahl der Zustände im Grundzustand liefert (d.h. Γ_m),

also

$$\boxed{(-1)^F_R = \prod_{n=1}^{\infty} (-1)^{d_n \cdot d_n}}$$

↑ beacht: $n=0$ ausgenommen

GSO - Projektion

Betrachte nur Zustände $|\phi\rangle$ mit

$$\boxed{(-1)^F |\phi\rangle = |\phi\rangle}$$

(und damit insbesondere das Tachyon ausgeschlossen).

Man kann zeigen: Die GSO - Projektion löst alle drei oben genannten Probleme.

(Der Beweis der Raum-Zeit-SUSY ist komplizierter, wir werden aber einen starken Hinweis finden, s.u.. Den allg. Beweis werden wir nicht behandeln.)

Wir werden von jetzt an bei allen Superstringtheorien die GSO - Projektion annehmen.

7) Supersymmetrie von Typ I - Superstrings

oder: Ein-Schleifen-Zustandssumme für
Typ I - Superstrings

Supersymmetrie erfordert gleich viele bosonische und fermionische Zustände in jedem Masseniveau (dies erfüllt für $\alpha^2=0$, s.o.).

Die Zahl der Zustände tritt auch auf in der Ein-Schleifen-Zustandssumme (vgl. geschl. bosonischer String \rightarrow Torus etc.).

Die Zustandssumme ist

$$Z(\tau) = \text{Tr} \left(e^{2\pi i \tau H} \right)$$

mit $H = L_0$ im R-Sektor und $H = L_0 - \frac{1}{2}$ im NS-Sektor, und der Spur im Hilbertraum. L_0 enthält einen Anteil $\sim p^2$ plus gewichtete Anzahloperatoren. Wir lassen im folgenden den p^2 -Anteil weg, da nur ein Gesamtfaktor im Ergebnis gibt und uns hier nicht interessiert. Wir setzen $q = e^{2\pi i \tau}$.

Wir erhalten im NS-Sektor:

$$Z_{NS}(\tau) = \sum_{\{N_m, N_r\}} q^{\sum_{m=1}^{\infty} m N_m + \sum_{r=1/2}^{\infty} r N_r - \frac{1}{2}}$$

↖ bos./ferm. Besetzungszahlen

und die Summe läuft nur über GSO-erlaubte N_m und N_r . Dies bewirkt auch der GSO-Projektor $\frac{1}{2}(1 + (-1)^F)$ in der Spur:

$$Z_{NS}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[q^H (1 + (-1)^F) \right]$$

wobei jetzt die Spur über den Hilbertraum vor der GSO-Projektion läuft.

Mit ähnlichen Techniken wie bei der Torus-Amplitude f. bosonische Strings findet man (betrachte separat $\text{Tr}(q^H)$ und $\text{Tr}(q^H (-1)^F)$ und beachte, daß Fermionen nur mit 0 oder 1 besetzt sind):

$$Z_{NS}(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \left[\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{m-1/2}}{1-q^m} \right)^8 - \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{m-1/2}}{1-q^m} \right)^8 \right]$$

Im R-Sektor ist die Lage einfacher. Hier sind keine Messeniveaus ausgeschlossen sondern bloß die Entartung halbiert. Der Grundzustand hat 8-fache Entartung. Wir lassen daher die GSO-Projektion und die d_0 -Operatoren weg und multiplizieren mit 8. Da im R-Sektor keine Normalordnungskonstante auftritt, haben wir außerdem keinen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten

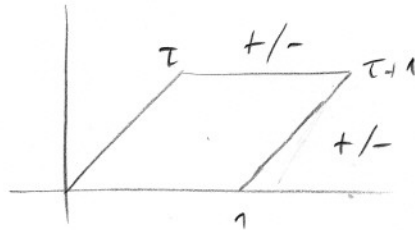
$$Z_R(\tau) = 8 \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^m}{1-q^m} \right)^8$$

Im wesentlichen haben wir $\text{Tr } q^M$ berechnet, wobei M der Massoperator. Bei dieser Taylorentwicklung dieses Ausdrucks ist der Koeffizient von q^m die Zahl der Zustände zur Masse m . Raum-Zeit-Supersymmetrie erfordert $Z_{NS} = Z_R$. Tatsächlich stimmen die beiden obigen Ausdrücke überein! Dies hat bereits Jacobi 1829 gefunden und als „recht seltsame Formel“ („aequatio identica satis abstrusa“) bezeichnet.

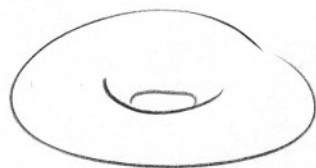
Wir haben hier also einen starken Hinweis auf die Raum-Zeit - Supersymmetrie von Typ I - Superstrings gefunden. Ein vollständiger Beweis ist aber deutlich aufwändiger.

Bemerkung:

Die Torus - Amplitude geschlossener Superstrings führt zu einer ähnlichen Rechnung. Dabei treten fermionische Spinstrukturen auf, d. h. verschiedene Kombinationen periodischer bzw. antiperiodischer Anschlußbedingungen, nämlich die vier Beiträge (\pm, \pm) , graphisch



wobei + periodische und - antiperiodische Identifizierung andeutet. Mittels Relationen von Jacobi - Theta - Funktionen zeigt man, daß die Torus - Amplitude tatsächlich verschwindet:



$$= 0$$

für Typ I -
Superstrings.

8) Typ II - Superstrings

Betrachte nun geschlossene Superstrings. Im wesentlichen entspricht ein geschlossener String zwei Sätzen offener Strings, wie bei bosonischen Strings gesehen. Dies ist bei Superstrings genauso. Aber: In der GSO-Projektion hatten wir Eigenwerte $\Gamma_{11} = +1$, d.h. positive Chiralität, gewählt. Negative Chiralität wäre auch möglich gewesen und hätte für offene Strings zum selben Ergebnis geführt.

Bei geschlossenen Strings müssen wir die GSO-Projektion separat für left- und right-mover anwenden. Dabei können wir gleiche oder entgegengesetzte Chiralität wählen! Dies führt auf zwei verschiedene Theorien:

$\left. \begin{array}{l} \text{entgegengesetzte} \\ \text{gleiche} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Chiralität für} \\ \text{left/right-mover} \end{array} \right\}$	$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Typ II A}} \\ \underline{\text{Typ II B}} \end{array} \right.$
		- Superstrings

Betrachte masselose Zustände für Typ II.
 Offener Superstring hatte $8+8=16$ masselose
 Zustände. \rightarrow Geschlossener Superstring hat
 $16 \times 16 = 256$ masselose Zustände, je
 $8 \times 8 = 64$ aus jedem Sektor.

Die d_0 -Operatoren ergeben Raum-Zeit-Spinoren.
 \rightarrow R-NS und NS-R sind Fermionen.
 R-R sind klarerweise Bosonen. Zwei Sätze
 d_0 -Operatoren ergeben auch Bosonen, d.h.
 NS-NS sind Bosonen. Wir haben also:

$R-NS, NS-R \rightarrow$ Fermionen
$R-R, NS-NS \rightarrow$ Bosonen

verträglich mit Raum-Zeit-SUSY.

In den Sektoren NS-NS, R-NS, NS-R
 spielt die relative Chiralität keine Rolle.
 Daher haben Typ IIA und Typ IIB in
diesen Sektoren dasselbe Massenspektrum.

Die masselosen Zustände sind folgende:

NS-NS:

Skalares Dilaton (1 Zustand)
 antisymm. Rang 2 - Tensor (28 Zust.)
 symmetr. Rang 2 - Tensor (35 Zust.)
 (Graviton)

NS-R:

Spin $\frac{1}{2}$ - Fermion (8 Zust.)
 Spin $\frac{3}{2}$ - Fermion (Gravitino) (56 Zust.)

R-NS:

wie NS-R

Wir haben also ein Graviton und insgesamt 2 Gravitinos, daher der Name Typ II.

Im R-R - Sektor unterscheiden sich die Typ IIA- und Typ IIB - Theorien:

Typ IIA R-R:

Vektor (8 Zust.)
 antisymm. Rang 3 - Tensor (56 Zust.)

Typ II B R-R:

Skalar (1 Zust.)

antisymm. Rang 2-Tensor (28 Zust.)

Selbstdualer antisymm. Rang 4-Tensor (35 Zust.)

Wichtige Beobachtung bei diesen

Ramond-Ramond-Feldern ist, daß

bei Typ II A R-R nur Felder mit ungeradem Rang auftreten, bei Typ II B R-R dagegen nur solche mit geradem Rang.

9) Heterotische Strings

Bei geschlossenen Strings sind die left-mover und right-mover unabhängig.

→ Es ist möglich, die right-mover supersymmetrisch zu machen, die left-mover aber nicht (oder umgekehrt) ("Heterose")

Dies nennt man heterotische Strings.

Man ergänzt also zur bosonischen String-Wirkung nur right-moving Fermionen:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \left[\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - 2i \psi_-^\mu \partial_+ \psi_{\mu-} \right]$$

Hier tritt aber ein Problem auf, da der right-moving-Teil nur in $D=10$ konsistent ist, der left-moving Teil aber nur in $D=26$.

Man muß daher auch bei den left-movers weitere Felder ergänzen. Bosonische Felder sind

dafür nicht geeignet, da sie left- und right-movers enthalten. Man ergänzt daher fermionische Felder, aber nicht mit

Vektorindex μ (denn dies würde gerade auf Typ II - Superstrings führen). Stattdessen

wähle Lorentz-Skalare λ_+ . Diese können (und müssen!) einen internen Index A tragen, λ_+^A .

Die Wirkung ist dann

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \left[\sum_{\mu=0}^9 (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - 2i \psi_-^\mu \partial_+ \psi_{\mu-}) - 2i \sum_{A=1}^n \lambda_+^A \partial_- \lambda_+^A \right]$$

Um Anomalien zu canceln, sind

$$n = 32$$

fermionische Raum-Zeit-Skalare λ_+^A nötig.

Für die Randbedingungen für λ_+^A gibt es zwei Möglichkeiten:

- * Alle 32 mit denselben (periodischen / anti-periodischen) Randbedingung. Dann hat die Wirkung eine $SO(32)$ -Symmetrie.
Man findet dann masselose Eichbosonen im Spektrum, und $SO(32)$ wird zu einer Eichsymmetrie.

Diese Superstringtheorie heißt

$SO(32)$ heterotischer String

- * Teile die 32 Felder in zwei Gruppen zu je 16, und wähle für die Gruppen verschiedene (period. / antiperiod.) Randbedingungen. Man findet dann die $E_8 \times E_8$ -Symmetrie. (Beachte: nicht wie man erwartet $SO(16) \times SO(16)$).

Diese Theorie heißt $E_8 \times E_8$ heterotischer String.

Wir beschränken uns hier darauf, das
masselose bosonische Spektrum des
heterotischen Strings anzugeben:

symmetrischer Rang 2-Tensor $G_{\mu\nu}$ (Graviton)

antisymm. Rang 2-Tensor $B_{\mu\nu}$

Skalar ϕ (Dilaton)

496 Vektorfelder A_{μ}^a ($1 \leq a \leq 496$) in
adjungierter (496-dim.) Darstellung
von $SO(32)$ bzw. $E_8 \times E_8$.

(Beachte: 496 ist hier nicht die Zahl
der Zustände, wie wir sie bei den
Typ II-Strings angeben haben).

IX Supergravitation und Niedrigenergie Theorien für Superstrings

Das Spektrum der Superstrings enthält ein Graviton. Man erwartet daher, daß man bei hinreichend "niedrigen" Energien (unterhalb der Planck-Skala also) eine Gravitationstheorie erhält. Wir betrachten hierzu zunächst Super-Yang-Mills-Theorie und Supergravitation. [Die Formeln sind in diesem Kapitel vereinfacht dargestellt, z.B. beschränken wir uns auf bosonische Felder. Wegen SUSY sind natürlich immer auch Fermionen vorhanden.]

1) Super-Yang-Mills-Theorie (SYM)

Yang-Mills-Theorien sind Eichtheorien mit nicht-abelscher Eichgruppe.

Erinnerung: U(1) - Eichtheorie.

Starte mit freien Feldern ϕ (hier: einfachster Fall ϕ Skalar) mit Wirkung

$$S = \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*$$

Beachte die globale $U(1)$ -Invarianz
 $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$. Fordere weiter lokale Invarianz

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$$

Dies erfordert Hinzufügen von Eichfeldern A_μ
 und Konstruktion einer kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$$

Die Wirkung wird dann

$$S = \int d^4x \left(D^\mu \phi D_\mu \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Wählt man statt lokaler Invarianz unter
 $U(1)$ lokale Invarianz unter einer anderen,
 (i.a. nicht-abelschen), Lie-Gruppe, so
 erhält man Yang-Mills-Theorie. Dessen

Wirkung ist

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right]$$

wobei

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

und f_{bc}^a sind die Strukturkonstanten der Lie-Algebra

$$[t^a, t^b] = f_{abc} t^c$$

der Erzeugenden t^a der Lie-Gruppe.

Obige Wirkung beschreibt reine YM-Theorie (z.B. QCD nur mit Gluonen). Man kann nach Bedarf Materiefelder ergänzen und benutzt die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + t^a A_\mu^a$$

Durch Ergänzen von Fermionen in geeigneter supersymmetrischer Weise erhält man dann Super-Yang-Mills-Theorien (SYM).

Die Details sind dabei komplizierter, insbesondere kann man verschieden viele Supersymmetrien ($N=1,2,\dots$) fordern.

2) Supergravitation

Grundsätzlich führt Quantengravitation auf viele Probleme (z.B. Divergenzen in der Störungstheorie). Es ist aber möglich und interessant, die Wirkung zu betrachten.

Wir haben gesehen, daß Supersymmetrie und Poincaré-Transformationen eng zusammenhängen: der Kommutator zweier SUSY-Transformationen ist eine Translation, also eine Poincaré-Transformation.

Jetzt wollen wir lokale Supersymmetrie einführen, d.h. SUSY-Transformationen, die von Raum-Zeit-Koordinaten abhängen.

Damit erhalten wir aber auch zwangsläufig (s.o.) lokale Poincaré-Transformationen,

d.h. Gravitation! Die durch lokale

SUSY erhaltene Supergravitation (SUGRA)

umbringt also lokale SUSY und Gravitation.

Man findet, daß Supergravitationstheorien fast eindeutig festgelegt sind, d.h. es gibt nur wenige Möglichkeiten.

Sind die Dimension und die Zahl der Supersymmetrien ($N=1, 2, \dots$) festgelegt, so ist damit die SUGRA - Theorie festgelegt, falls nicht noch explizit andere Felder angekoppelt werden.

Auch die Wahl der Dimension und der Anzahl der SUSYs ist stark eingeschränkt.

Die SUGRA mit der größtmöglichen Symmetrie ist die $N=1, D=11$ Supergravitation.
(Die Wirkung ist kompliziert und wird für unsere Zwecke hier nicht benötigt.)

Alle anderen SUGRA - Theorien können aus dieser abgeleitet werden.

$D=11, N=1$ SUGRA hat als masselose Felder:

Graviton G_{MN}

antisymmetr. Rang 3 - Tensorfeld A_{MNP}

Dies sind die bosonischen Felder,
außerdem gibt es noch ein (fermionisches)
masseloses Gravitino.

↑
($\leftrightarrow N=1$)

Andere SUGRAs erhält man aus der $D=11, N=1$ SUGRA durch dimensionelle Reduktion (z.B.

Kompaktifizierung einer Dimension auf Kreis von Radius R und Grenzwert $R \rightarrow 0$).

Man erhält 3 verschiedene SUGRAs in $D=10$:

Typ I, Typ IIA und Typ IIB.

Typ IIA $D=10, N=2$

Kompaktifiziert man $D=11, N=1$ SUGRA auf einem Kreis, so spalten die 11-dim.

Felder (das sind Darstellungen von $SO(1,10)$) auf in Darstellungen von $SO(1,9)$. Insbesondere.

$$G_{MN} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ M, N \in \{0, \dots, 10\}}} \begin{cases} G_{\mu\nu} & (\mu, \nu = 0, \dots, 9) \\ A_\mu & (\text{aus } G_{\mu, 10}) \\ \phi & (\text{aus } G_{10, 10}) \end{cases}$$

und

$$\text{antisymmetr. Tensor } A_{MNP} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \text{Rang 3 antisymmetr. Tensor} \\ A_{\mu\nu\epsilon} \\ \text{Rang 2 antisymmetr. Tensor} \\ B_{\mu\nu} \\ (\text{aus } A_{\mu\nu, 10}) \end{cases}$$

Betrachtet man die Fermionen, so findet man $N=2$ SUSY in dieser reduzierten Theorie, daher der Name Typ II.

Die $D=11$ SUGRA war nicht chiral (keine rechts / links - Präferenz), und auch die so erhaltene Typ IIA SUGRA ist nicht chiral, d.h. sie enthält 2 Fermionen mit entgegengesetzten Chiralitäten.

Typ IIB $D=10, N=2$

Man kann auch eine $D=10, N=2$ SUGRA konstruieren mit zwei Fermionen gleicher Chiralität. Die Wirkung dieser Theorie ist sehr schwer zu konstruieren, die Bewegungsgleichungen sind aber einfacher. (Diese reichen auch hier: man kann und will gar keine Quanteneffekte behandeln wegen der üblichen Probleme.)

Typ I $D=10, N=1$

Es gibt auch eine $D=10$ SUGRA mit nur links SUSY, $N=1$, daher der Name Typ I.

Bosonische Felder sind hier: Graviton $G_{\mu\nu}$, antisymmetr. Tensor $B_{\mu\nu}$, Skalar ϕ .

Beachte, daß SUGRA - Theorien mehr beinhalten als nur Gravitation.

3) Niederenergie - Wirkungen für Superstrings

Quantenfeldtheorie funktioniert sehr gut bei für uns erreichbaren Energien. Man erwartet daher, QFT als effektive Theorie aus Superstrings bei niedrigen Energien zu erhalten, also unterhalb der Planck-Masse m_{Pl} . Wir suchen daher nach einer effektiven Wirkung für niedrige Energien.

Massive Stringanregungen haben typischerweise Massen $\sim m_{Pl}$ und sind daher nicht wichtig für die effektive Theorie. Wir müssen nur masselose Stringzustände berücksichtigen. Damit bleiben aber immer noch unendlich viele mögliche Terme für die effektive Wirkung.

Als zusätzliche Bedingung werden wir nur solche Terme in der effektiven Wirkung zulassen, die die minimale Anzahl von Ableitungsoperatoren haben. (Ableitung entspricht Energie / Impuls bestimmen $\leftrightarrow \sim m_{Pl}$)

Wir erhalten dann eine effektive Wirkung, die jetzt aber nicht wie üblich als QFT aufgefaßt wird, sondern als Näherung für die fundamentalere Stringtheorie. Mögliche Probleme mit der Konsistenzbarkeit sind dann keine fundamentalen Probleme mehr.

Man findet: Die Form der effektiven Wirkung ist komplett durch die masselosen Zustände der Stringtheorie und die Symmetrien bestimmt.

Viele Terme in der effektiven Wirkung sind für alle Superstringtheorien gleich. Alle Superstrings (auch Typ I) enthalten geschlossene Strings und damit Graviton, Dilaton und antisymmetrisches B_{μν}. Mit den Symmetrien findet man dann, daß alle Niederenergie-Wirkungen einen Teil der Form haben

$$S_{\text{eff}} = \int d^{10}x \sqrt{G} e^{-2\phi} \left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right]$$

wobei R der Krümmungsskalar (Ricci-Skalar) ist, der durch die Metrik bestimmt wird, und $H_{\mu\nu\lambda}$ ist die aus $B_{\mu\nu}$ erhaltene Feldstärke.

Wir wollen jetzt die effektiven Wirkungen aller Superstringtheorien angeben. Konstanten sind dabei nicht so wichtig (d.h. können durch Redefinition der Felder absorbiert werden). Es ist z.B. günstig,

$$g_{\mu\nu} = e^{-\phi/2} G_{\mu\nu}$$

zu benutzen. Obige Formel für den universellen Anteil der effektiven Wirkung wird daher unten "leicht deformiert" auftreten.

Der Einfachheit halber werden wir nur die bosonischen Anteile der effektiven Wirkungen diskutieren.

(i) Typ II

Im NS-NS Sektor sind die Teilchen wie oben angegeben, die R-R Sektoren sind verschieden bei Typ IIA und IIB.

* Typ II A

Der R-R-Sektor enthält

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vektorfeld } A_\mu \\ \text{Rang 3 antisymmetr. } C_{\mu\nu\lambda} \end{array} \right.$$

Erhalte daraus Feldstärke $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
und in ähnlicher Weise aus $C_{\mu\nu\lambda}$ die
4-Form Feldstärke $G_{\mu\nu\lambda\kappa}$.

Aus den Symmetrien folgt dann

$$S_{\text{eff}}^{\text{IIA}} = \frac{1}{(2\pi)^7} \int d^{10}x \sqrt{g} \left[R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\phi} H^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{4} e^{3\phi/2} F^2 - \frac{1}{48} e^{\phi/2} G^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2304} \frac{1}{\sqrt{g}} e^{\phi_0 \dots \phi_9} B_{\mu_0 \mu_1} G_{\mu_2 \dots \mu_5} G_{\mu_6 \dots \mu_9} \right]$$

Man findet: Die volle effektive Wirkung
für Typ II A - Strings (mit Fermionen!)
ist genau die Typ II A SUGRA.

* Typ II B

Hier ist die Lage komplizierter. Man hat
einen Rang 4-Tensor mit selbstdualer
Feldstärke. Eine solche ist sehr schwierig

in der effektiven Wirkung zu behandeln.
 Es gibt daher keinen einfachen Ausdruck
 für $S_{\text{eff}}^{\text{II B}}$. Man kann aber die
 Bewegungsgleichungen finden. Diese sind
 genau dieselben wie bei Typ II B SUGRA
 (auch dort keine einfache Wirkung angeben).

(ii) Typ I

Hier hat man Chan-Paton-Labels mit
 der Gruppe $SO(32)$ und erhält daher einen
 Vektor A_μ^a in 496-dim. (adjungierte) Darstellung

Zusätzlich hat man Wechselwirkung und
 damit auch geschlossene Strings. Das
 geschlossene Stringspektrum von Typ I ist
 wie das von Typ II B mit geeigneter
 Paritätsprojektion. Bei dieser bleiben:

Graviton $G_{\mu\nu}$, Dilaton ϕ (von NS-NS)
 antisymmetr. $B_{\mu\nu}$ (von R-R)

Damit und mit den Symmetrien
 erhält man ($F_{\mu\nu}$ Feldstärke zu A_μ)

$$S_{\text{eff}}^{\text{I}} = \frac{1}{(2\pi)^7} \int d^{10}x \sqrt{g} \left[R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{\phi} H^2 - \frac{1}{4} e^{\phi/2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right]$$

über a

Das ist gerade Typ I SUGRA, gekoppelt an $SO(32)$ SYM!

(iii) Heterotische Strings

Die masselosen Felder sind:

$$G_{\mu\nu}, \phi, B_{\mu\nu}$$

Vektor A_{μ}^a in 496-dim. Darstellung von $SO(32)$ bzw. $E_8 \times E_8$

(also genauso wie bei Typ I!)

Man erhält als effektive Wirkung

$$S_{\text{eff}}^{\text{het}} = \frac{1}{(2\pi)^7} \int d^{10}x \sqrt{g} \left[R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\phi} H^2 - \frac{1}{4} e^{-\phi/2} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right]$$

Dies ist gerade die Wirkung für Typ I SUGRA gekoppelt an $SO(32)$ bzw. $E_8 \times E_8$ SYM.

Wichtig: beachte anderes Vorzeichen im Exponenten des Terms mit H^2 verglichen mit $S_{\text{eff}}^{\text{I}}$.

X String - Dualitäten und M - Theorie

Es gibt eine Reihe von Dualitäten zwischen verschiedenen Superstringtheorien, darunter sowohl perturbative (bei denen schwache auf schwache Kopplung abgebildet wird) als auch nichtperturbative (bei denen schwache auf starke Kopplung abgebildet wird und umgekehrt). Nichtperturbative Dualitäten werden S - Dualitäten genannt.

Die fünf perturbativen Superstringtheorien sind Aspekte einer zugrundeliegenden Theorie, die M - Theorie genannt wird.

1) Typ I - heterotische SO(32) Dualität

Man sieht leicht, daß die effektiven Wirkungen S_{eff}^I und S_{eff}^{het} ineinander übergehen unter der Ersetzung

$$\phi \rightarrow -\phi .$$

Wählt man die heterotische SO(32) - Theorie, so haben beide Wirkungen auch dieselben Symmetrien.

Dies legt die Vermutung nahe, daß die vollen Typ I - und het $SO(32)$ - Stringtheorien dual zueinander sind, d.h. sie sind verschiedene Beschreibungen derselben Theorie bzw. Physik.

Da die beiden Theorien aber zunächst sehr verschieden aussehen, müssen wir genauer betrachten, was die Transformation $\phi \rightarrow -\phi$ bedeutet. Dazu betrachten wir den Faktor g_s , den wir zusammen mit α' oben weggelassen hatten, da diese Faktoren durch Redefinition der Felder absorbiert werden können.

Man findet, daß alle obigen effektiven Wirkungen invariant sind unter

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi - c \\ g_s \rightarrow e^c g_s \end{cases}$$

für eine beliebige konstante c . Um g_s in der Wirkung zu eliminieren, setzt man $e^c = \frac{1}{g_s}$, d.h. obige Transformation wird

$$e^\phi \rightarrow g_s e^\phi.$$

Daran erkennt man, daß $\phi \rightarrow -\phi$ einer Inversion $g_s \rightarrow \frac{1}{g_s}$ der Kopplung entspricht. Deshalb sind Typ I und het $SO(32)$ so verschieden: Schwache Kopplung der Typ I - Theorie entspricht starker Kopplung der het $SO(32)$ - Theorie, und umgekehrt. Die Dualität zwischen den beiden ist also eine S-Dualität:

$$\boxed{\text{Typ I} \quad \overset{S}{\longleftrightarrow} \quad \text{het } SO(32)}$$

Der Beweis der Dualität ist daher schwierig und bisher nicht gelungen. Es gibt aber eine Reihe nichtperturbativer Tests, die alle die Dualität bestätigen.

2) Typ II - T-Dualität

Wir hatten gesehen, daß T-Dualität einer einseitigen Paritätstransformation entspricht, also einer Spiegelung für den nicht-mobiler Teil des Strings.

Dabei wird also aus einem Zustand mit entgegengesetzten Chiralitäten für left- und right-über ein Zustand mit gleichen Chiralitäten und umgekehrt. Man vermutet daher:

Typ IIA - Theorie kompaktifiziert auf Kreis mit Radius R ist T-dual

zu Typ IIB - Theorie kompaktifiziert auf Kreis mit Radius $R' = \frac{l^2}{R}$.

Dies ist eine perturbative Dualität und kann tatsächlich bewiesen werden.

$$\boxed{\text{IIA auf } S_1 \xleftrightarrow{T} \text{IIB auf } S_1}$$

Dabei verhalten sich die Kopplungskonstanten folgendermaßen:

In 10D haben die effektiven Wirkungen für IIA und IIB einen Faktor

$$\frac{1}{g_s^2} \int d^{10}x \{ \dots \}$$

Bei der Kompaktifizierung auf S_1 wird daraus:

$$II A : \frac{2\pi R}{g_s^2} \int d^p x \{ \dots \}$$

$$II B : \frac{2\pi \tilde{R}}{\tilde{g}_s^2} \int d^p x \{ \dots \}$$

Daraus erkennt man (beachte $\alpha' = l^2$), daß

$$\tilde{g}_s = g_s \frac{\sqrt{\alpha'}}{R}$$

Die Kopplungen sind also nicht gleich, aber proportional (in Übereinstimmung damit, daß die Dualität perturbativ ist).

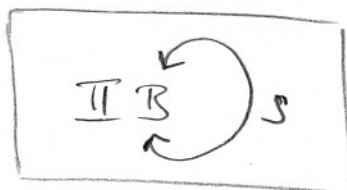
3) Weitere Dualitäten

* Die beiden heterotischen Stringtheorien sind ebenfalls T-dual zueinander!

$$\text{het } E_8 \text{ auf } S_1 \xleftrightarrow{T} \text{het } SO(32) \text{ auf } S_1$$

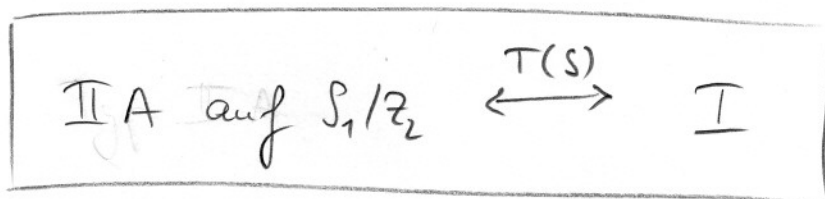
(Bemerkung: der Beweis führt auf sog. Ladungsgitter).

- * Typ II B ist selbstdual unter einer S-Dualität. Genauer handelt es sich um eine $SL(2, \mathbb{Z})$ -Dualität, d.h. eine ganze Gruppe von Dualitäten.



(Bemerkung: dabei werden sog. D-Strings und F-Strings aufeinander abgebildet)

- * Typ I kompaktifiziert auf S_1 ist T-dual zu Typ II A kompaktifiziert auf einem S_1/\mathbb{Z}_2 Orientifold. (genauer spricht man bei letzterer Theorie von Typ I').



Die Kopplungen verhalten sich dabei wie

$$g_{I'} \sim \frac{1}{\sqrt{g_I}} R_g^{3/2}$$

4) M - Theorie

Betrachte IIA - Theorie bei starker Koppelung. Zur Erinnerung: man leitet IIA SUGRA aus 11D SUGRA durch Kompaktifizierung auf S^1 erhalten.

Man findet: in IIA - Theorie gibt es DO - branes mit Masse $\sim \frac{1}{l_{gs}}$. Dies sind die leichtesten solitonischen Zustände.

(Dies, obwohl die Masse unendlich wird für $g_s \rightarrow 0$, d.h. im perturbativen Bereich.

Die anderen Zustände haben aber Masse von $O(\frac{1}{g_s^2})$).

Weiter findet man („teilweise bewiesen“), daß es gebundene Zustände von N DO - branes mit Masse $\frac{N}{l_{gs}}$ gibt. Diese sind

BPS - Zustände (Bogomolnyi - Prasad - Sommerfield), d.h. ihre Masse ist proportional ihrer Ladung (unter einer 1-Form) unabhängig von der Größe von g_s .

Das Massenspektrum $\frac{N}{l_s g_s}$ ist also äquidistant. Das ist ein typisches Zeichen einer Kompaktifizierung! Bei einer Kompaktifizierung auf einem Kreis erhält man ein Spektrum

$$m = \frac{N}{R_{11}}$$

wobei R_{11} der Kompaktifizierungsradius ist. (Dies entspricht auch der Relation zwischen Ladung und Masse für BPS-Zustände: Aus g_{MN} erhält man bei Kompaktifizierung

$$A_\mu = g_{\mu, 11} \quad \left(\begin{array}{l} \nearrow \text{Ladung} \\ \uparrow \text{BPS-Eigenschaft} \\ \nwarrow \text{Impuls bzw. Masse} \end{array} \right)$$

In diesem Bild identifizieren wir also

$$\boxed{R_{11} = l_s g_s}$$

Wir erhalten also eine zusätzliche 11-te Dimension aus IIA-Theorie bei starker Kopplung! Für $g_s \rightarrow \infty$ erhält man eine 11-dim. Theorie, die M-Theorie.

In ähnlicher Weise findet man, daß die heterotische E_8 -Theorie mit Kopplung g_s dual ist zu M-Theorie kompaktifiziert auf einem S_1/Z_2 -Orientifold mit Radius $\sim g_s^{2/3}$. Im Falle großer Kopplung, $g_s \rightarrow \infty$, erhält man wieder die 11-dimensionalen M-Theorie.

Das große Problem ist derzeit, daß keine Beschreibung der vollen 11-dim. M-Theorie bekannt ist.
 → Was ist eigentlich M-Theorie?!

5) Zusammenfassung String-Dualitäten

