Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

5. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 23.11.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 26.11.2007

S 11 Alkali-Atome (10 Punkte)

In einem Alkali–Atom wird die Kernladung durch die Elektronen gefüllter Schalen abgeschirmt, so daß das effektive Potential für das Leuchtelektron die Form

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{e_0^2}{r}\,(1 + (Z-1)\chi(r)) \tag{1}$$

hat, wobei χ eine monoton fallende Funktion ist mit $\chi(r) \geq 0$, $\chi(0) = 1$ und $\chi(\infty) = 0$. Ein möglicher Ansatz für diese Abschirmfunktion ist z. B. $\chi(r) = \exp(-r/a_0)$. Im folgenden wollen wir den Spin des Elektrons vernachlässigen.

(a) Geben Sie die Ausdrücke für die Energie des Leuchtelektrons mit der Hauptquantenzahl $n > 1$ in Störungstheorie 1. Ordnung an, indem Sie die Abweichung vom Coulombpotential als Störung betrachten. (Hier ist keine Rechnung erforderlich.)

(b) Zeigen Sie, daß die Störung (d. h. die Energieverschiebung) diagonal in den Quantenzahlen l und m ist.

(c) Argumentieren Sie, daß der Zustand mit $l = 0$ am tiefsten und daß der Zustand mit $l = n - 1$ am höchsten liegt. Betrachten Sie hierzu die Störung in erster Ordnung.

(d) Bestimmen Sie das Verhalten der exakten Lösung am Ursprung.

(e) Schätzen Sie für das Leuchtelektron des Natrium–Atoms die Aufspaltung zwischen der s-Welle und der p-Welle des Grundzustands ab. Benutzen Sie hierzu in der Störung $\chi(r) = \exp(-r/a_0)$. (Es bietet sich an, für die hier auftretenden Integrale z. B. Mathematica oder Maple zu benutzen.)

P 12 Parität für Teilchen ohne Spin (5 Punkte)

Der Paritätsoperator $\mathcal{P}$ ist definiert als ein Operator, der in der Ortsdarstellung auf einen Zustand $|\psi\rangle$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ wirkt gemäß

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Paritätsoperators:

$$\mathcal{P}^2 = \mathbf{1} \tag{3}$$
$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß der Paritätsoperator unitär ist und die Eigenwerte ± 1 hat.

(b) Sei $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$. Zeigen Sie, daß $[\mathcal{P}, \mathbf{H}] = \left[\mathcal{P}, \vec{\mathbf{L}}\right] = 0$, und schließen Sie, daß es simultane Eigenfunktionen von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}^2, \mathbf{L}_3$ und $\mathcal{P}$ gibt. Zeigen Sie außerdem für $\psi(\vec{x}) = f(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}) = (-1)^l \psi(\vec{x})\,. \tag{5}$$

Hinweis: Es gilt

$$Y_l^l(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\,\sin^l\vartheta\, e^{il\varphi}\,. \tag{6}$$

P 13 Parität und harmonischer Oszillator (5 Punkte)

(a) Welche Parität haben die Eigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Parität und der (Anti-)Symmetrie der Wellenfunktion her.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Grundzustand. Für die angeregten Zustände ist es hilfreich zu zeigen, daß $\mathcal{P}\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}^\dagger\mathcal{P} = 0$.

(b) Geben Sie die Energieeigenwerte an für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } 0 < x\,. \end{cases} \tag{7}$$

Hinweis: Denken hilft hier mehr als Rechnen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html